

**DIE ZWEIPARAMETRIGE
WAVEFORM RELAXATION UND IHRE
ANWENDUNG IN DER VLSI-SIMULATION**

Konstantin Jacoby

München 1987

DIE ZWEIPARAMETRIGE WAVEFORM RELAXATION
UND IHRE ANWENDUNG
IN DER VLSI-SIMULATION

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

KONSTANTIN JACOBY

aus München

eingereicht am 9.4.1987

1. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Richert

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1987

INHALT

EINLEITUNG		1
0.1	<u>Die Transientenanalyse - Problemstellung und aktuelle Lösungsmethoden</u>	2
0.2	<u>Zusammenfassung</u>	6
TEIL 1 :	DIE ZWEIPARAMETRIGE WAVEFORM RELAXATION UND IHRE GRUNDLEGENDEN KONVERGENZEIGENSCHAFTEN	11
1.1	<u>Die Waveform Relaxation von E. Lelarsmee und ihre Erweiterung zu einem zweiparametri- gen Verfahren</u>	12
1.1.1	Beschreibung des Verfahrens von E. Lelarsmee	12
1.1.2	Relaxationsparameter für die Waveform Relaxation	17
1.2	<u>Zur Konvergenz der zweiparametrischen Waveform Relaxation</u>	23
1.2.1	Der Konvergenzsatz für den AWR-Algorithmus	24
1.2.2	Logarithmische Normen und Dahlquist-Kon- stanten	57
1.2.3	Abschätzungen für die Iterierten des AWR- Algorithmus	71
TEIL 2 :	KONSTRUKTION OPTIMALER RELAXATIONSPARAMETER FÜR DIE WAVEFORM RELAXATION	87
2.1	<u>Optimale Parameter α, ω aufgrund von Ab- schätzungen für die Waveform Relaxation</u>	88
2.1.1	Eine Formel zur Bestimmung geeigneter Relaxa- tionsparameter für lineare Systeme gewöhnli- cher Differentialgleichungen	89

2.1.2	Ein dynamisches Optimierungsproblem mit nichtholonomen Nebenbedingungen für den AWR-Algorithmus	100
2.2	<u>Optimale Parameter α, ω aufgrund von Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Waveform Relaxation</u>	119
2.2.1	Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Waveform Relaxation	120
2.2.2	Ein Separationsansatz zur numerischen Bestimmung der Relaxationsparameter für $\alpha = \Omega$	136
TEIL 3 :	TRANSIENTENANALYSE VON MOS-SCHALTUNGEN MIT GLOBALEN RÜCKKOPPLUNGEN	154
3.1	<u>Die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhältnis von MOS-Schaltungen</u>	155
3.1.1	Ein MOS-Schaltungsmodell - Schaltungselemente und Schaltungstopologie	156
3.1.2	Die Kirchhoff'schen Gesetze für MOS-Schaltungen und die Schaltungsgleichungen	164
3.1.3	Die Schaltungsgleichungen für Systeme gekoppelter MOS Schaltungen	169
3.2	<u>Das Verhalten der Waveform Relaxation bei der Lösung von MOS-Schaltungen mit globalen Rückkopplungen</u>	174
3.2.1	Eine heuristische Betrachtung	174
3.2.2	Die Störung der Kirchhoff'schen Gesetze durch die Waveform Relaxation und ihre Korrektur	176

TEIL 4 :	CROSS-TALK-SIMULATION MIT DER WAVEFORM RELAXATION	203
4.1	<u>Kopplungen zwischen parallelen Bandleitungen</u>	204
4.1.1	Das Schaltungsmodell für Bandleitungen	205
4.1.2	Die Gleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Kopplung von Band- leitungen	208
4.2	<u>Sachgemäße Anfangs-Randwertprobleme für die cross-talk-Gleichungen</u>	223
4.2.1	Elemente der Theorie der Pseudodifferential- operatoren	223
4.2.2	Charakterisierung von Reflektionseigenschaf- ten an den Enden der Bandleitungen	238
4.2.3	Einbettung der cross-talk-Simulation in die Schaltungssimulation	246
TEIL 5 :	TESTBEISPIELE	249
5.1	<u>Die Gleichungen zur Beschreibung des dynami- schen Verhaltens von MOSFET-Inverter-Ketten bzw. MOSFET-Ringoszillatoren</u>	250
5.2	<u>Testrechnungen für MOSFET-Inverter-Ketten und MOSFET-Ringoszillatoren</u>	266
BEZEICHNUNGEN		288
LITERATUR		290



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554617_0008

EINLEITUNG

Die Entwicklung von digitalen höchstintegrierten Schaltungen (VLSIC's : very large scale integrated circuits) erfordert den Einsatz effizienter und leistungsfähiger Verfahren für das rechnergestützte Entwerfen und Konstruieren (CAD). Der Entwurf einer VLSI-Schaltung wird heute mit Hilfe von Simulationen auf folgenden Ebenen durchgeführt:

- register transfer level,
- logic level,
- timing level,
- circuit level,
- device level,
- process level.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren, die Waveform Relaxation von E. Lelarsmee [siehe (28),(30)], wird für die Untersuchung des elektrischen Verhaltens der geplanten integrierten Schaltung verwendet (circuit level). Der bei weitem größte Teil der dafür aufzuwendenden Rechenzeit, ca. 85 % [vgl. hierzu (16), p. 37], wird dabei von der sog. Transientenanalyse eingenommen.

Um die Transientenanalyse effizienter durchführen zu können, als dies mit Hilfe der Standardmethoden, wie sie etwa in den weit verbreiteten Simulationsprogrammen SPICE [siehe (35), (7), (54)] und ASTAP [siehe (56), (57)] implementiert sind, möglich ist, werden in den letzten Jahren relaxationsgestützte Algorithmen erprobt und mit Erfolg eingesetzt. Zur Einordnung der 1982 von Lelarsmee publizierten "Waveform Relaxation" in die Menge der aktuellen numerischen Verfahren der elektrischen Simulation wird im Folgenden eine kurze Problembeschreibung der Transientenanalyse und eine knappe Darstellung der Standardsimulatoren SPICE und ASTAP im Vergleich zu den oben genannten relaxationsgestützten Algorithmen geliefert. Daran schließt sich eine Zusammenfassung dieser Arbeit an.

0.1 Die Transientenanalyse -

Problemstellung und aktuelle Lösungsmethoden

Unter der Transientenanalyse versteht man die Simulation der Reaktion der Spannungs- und Stromverläufe an beliebigen Stellen einer vorgegebenen, in einem vorbestimmten oder berechneten elektrischen Zustand befindlichen Schaltung auf gegebene Eingangssignale in Abhängigkeit von der Zeit.

Das dynamische Verhalten einer elektrischen Schaltung wird dabei durch ein i.a. sehr großes System aus impliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen und aus nichtlinearen, algebraischen Gleichungen, die gegenseitigen Kopplungen unterliegen, beschrieben. Obwohl relaxationsgestützte Methoden der Transientenanalyse auf die Simulation von integrierten Schaltungen verschiedenster Technologien anwendbar sind, kommt ihre Effizienz besonders bei der Analyse von großen integrierten Schaltungen der MOS-Technologien (MOS: metal oxide semiconductor) zum Tragen [vgl. (39), p. 486].

Im Falle einer Mos-Schaltung reduziert sich das Gleichungssystem zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens, falls zu dessen Formulierung die sog. "modifizierte Knotenanalyse" [MNA: modified nodal analysis, siehe (23)] herangezogen wird, auf ein Anfangswertproblem für ein System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dabei geht man gemäß [(39), Abschnitt II] von folgenden vereinfachenden, jedoch nicht wesentlich einschränkenden Voraussetzungen an die Schaltungstopologie aus:

- Alle resistiven Schaltungselemente einschließlich der aktiven Schaltungselemente werden durch Zustandsgleichungen charakterisiert, deren Steuervariable (controlling variables) Spannungen entsprechen und deren gesteuerte Variable (controlled variables) Ströme entsprechen.
- Alle Energiespeicher sind zweipolige (i.a. nichtlinear spannungsgesteuerte) kapazitive Elemente (capacitors).

- Alle unabhängigen Spannungsquellen sind geerdet.

Die am weitesten verbreiteten sog. Standardprogramme für die elektrische Simulation von Schaltungen sind ASTAP [1973, siehe (56), (57)] und SPICE [1975, siehe (35), (7), (54)].

A.L. Sangiovanni-Vincentelli gibt dazu folgende Daten an [vgl. (45), p. 19,20]:

- ca. 10 000 SPICE-Aufrufe pro Monat bei einem der größten Hersteller von Halbleiterbauelementen in den USA,
- ca. 60 000 SPICE-Aufrufe pro Jahr durch die University of California in Berkeley, USA,
- über 150 ASTAP-Aufrufe pro Tag bei IBM East Fishkill im Dezember 1977.

Der Transientenanalyse durch die Standardprogramme ASTAP und SPICE liegt nun folgende Vorgehensweise zugrunde:

Zur Diskretisierung des gegebenen Systems impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen im Zeitbereich werden steif-stabile Integrationsformeln wie das Backward-Euler-Verfahren, die Trapezregel oder das BDF-Verfahren von Gear (BDF: backward difference formulae) angewendet. Detaillierte Beschreibungen dieser Verfahren findet man bei A.L. Sangiovanni-Vincentelli [(45), Abschnitt 6], bei Gear (17) und bei R.K. Brayton et. al. (2). Das durch die Integrationsformeln aus dem Differentialgleichungssystem an einem vorbestimmten Zeitpunkt erzeugte nichtlineare Gleichungssystem wird durch Anwendung eines gedämpften Newton-Verfahrens gelöst; man erhält dadurch an diesem Zeitpunkt eine Folge von großen, dünn besetzten linearen Gleichungssystemen. Diese werden mit einem direkten Verfahren, d.h. mit Hilfe einer LU-Zerlegung und mit Hilfe des Gauss'schen Eliminationsverfahrens gelöst. Eine Startlösung für die Newton-Iteration wird hierbei gewonnen, indem Werte der Näherungslösung an zurückliegenden Zeitpunkten in eine explizite Integrationsformel (z.B. die explizite Euler-Formel) eingesetzt

werden. Durch eine geeignete Abschätzung des lokalen Abschneidefehlers [vgl. (2)] und durch eine Beschränkung der Anzahl der durchzuführenden Newton-Schritte wird schließlich das Abbruchkriterium für die Newton-Iteration und eine neue Schrittweite zur Berechnung des nächsten Zeitpunktes der Diskretisierung bestimmt.

Dieses Vorgehen hat sich zwar in vielen Fällen als zuverlässig und genau erwiesen, kann aber wegen des hohen Rechenzeitbedarfs, der vorwiegend vom Aufstellen der Jacobi-Matrix im Newton-Verfahren herrührt, nicht mehr effizient für die Analyse von großen Schaltungen eingesetzt werden: Während die für die Aufstellung der linearen Gleichungssysteme benötigte Rechenzeit linear von der Anzahl der Zustandsvariablen abhängt, wächst die für deren Lösung benötigte Rechenzeit superlinear mit der Anzahl der Zustandsvariablen. A.L. Sangiovanni-Vincentelli gibt dieses Wachstum mit $O(N^\beta)$, $1.1 < \beta < 1.5$, an [siehe (39), SIAM, p.489].

Eine Alternative zur direkten Lösung großer linearer Gleichungssysteme ist durch Relaxationsverfahren, wie das Gauss-Seidel-Verfahren, das SOR-Verfahren und das Gauss-Jacobi-Verfahren gegeben [siehe (59)]. Seit Anfang der 60-iger Jahre werden auch Verallgemeinerungen dieser Verfahren zur iterativen Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen untersucht [siehe etwa (42), (47)]. Diese Relaxationsverfahren haben u.a. zwei wichtige Eigenschaften, die für die effiziente Schaltungssimulation genutzt werden können: Ihre Konvergenzgeschwindigkeit ist mindestens linear und sie konvergieren global, falls die Konvergenz gesichert ist, d.h. die Iteration kann im Gegensatz zum Newton-Verfahren mit einer beliebigen Anfangsnäherung für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems begonnen werden. Eine umfassende Beschreibung der Theorie iterativer Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme findet man etwa bei Ortega und Rheinboldt (41), es soll in dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen werden.

G. de Micheli, A.R. Newton und A.L. Sangiovanni-Vincentelli, Mitarbeiter des "Department of Electrical Engineering and

Computer Sciences", und des "Electronics Research Laboratory" der University of California in Berkeley, haben die oben genannten Relaxationsmethoden in der Transientenanalyse wie folgt eingesetzt: Um Rechenzeit einzusparen, führen sie entweder nur einen einzigen Newton-Schritt zur Linearisierung des mit Hilfe der oben genannten Integrationsformeln für jeden Zeitschritt gewonnenen nichtlinearen Gleichungssystems aus und lösen das entstehende lineare Gleichungssystem näherungsweise mit dem Gauss-Seidel-Verfahren oder mit dem Gauss-Jacobi-Verfahren, oder sie wenden das nichtlineare Gauss-Seidel-Verfahren auf das nichtlineare Gleichungssystem an und lösen die dadurch entstehenden skalaren nichtlinearen Gleichungen näherungsweise durch Ausführung eines einzigen Newton-Schrittes [siehe (33), (34)]. Diese Vorgehensweise wurde in den Simulationsprogrammen MOTIS (6), MOTIS-C (15) und SPLICE (37) erstmalig implementiert. Sie führt zu sehr schnellen Verfahren, die jedoch die Transientenanalyse mit geringerer Genauigkeit ausführen als die Standard-Simulationsprogramme SPICE und ASTAP. Ferner werden bei diesen Verfahren die Stabilitätseigenschaften der zur Diskretisierung der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Zeitbereich herangezogen steif-stabilen Integrationsformeln i.a. verändert, da die resultierenden Gleichungssysteme nicht mit hinreichender Genauigkeit gelöst werden [vgl. hierzu (33), Abschnitt III].

Vorteile der Standardmethoden und Vorteile der Relaxationsmethoden können nun in der Waveform Relaxation von E. Lelarsmee (28) genutzt werden. In diesem Verfahren wird das gegebene Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in geeignete Teilprobleme partitioniert, die einer gegenseitigen Kopplung unterliegen. Diese Teilprobleme werden dann sukzessive in einem Relaxationsprozess analog zum nichtlinearen Gauss-Seidel-Verfahren bzw. analog zum nichtlinearen Gauss-Jacobi-Verfahren gelöst, d.h. die Relaxation wird auf das partitionierte Anfangswertproblem als Iterationsverfahren im Banachraum $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ der auf dem Zeitintervall stetig differenzierbaren Vektorfunktionen angewendet. Für die Lösung der Teilsysteme sind dabei die Methoden der Standard-Simula-

tionsprogramme SPICE und ASTAP vorgesehen.

Über das Konvergenzverhalten und die Breite der Anwendungsmöglichkeiten der Waveform Relaxation sind bisher nur wenige experimentell gefundene Aussagen bekannt, die einerseits für eine Reihe von Schaltungen die Überlegenheit der Waveform Relaxation gegenüber SPICE dokumentieren, andererseits aber etwa bei Schaltungen mit Rückkopplungen erhebliche Konvergenzprobleme aufzeigen [vgl. (28), (39)]. Die Konvergenzsätze von E. Lelarasemee [siehe (28)] gelten unter recht allgemeinen Voraussetzungen, die jedoch in der Praxis nur schwer zu verifizieren sind.

0.2 Zusammenfassung

Ausgehend von der Waveform Relaxation von E. Lelarasemee wird in der vorliegenden Arbeit eine zweiparametrische Modifikation der Waveform Relaxation vorgeschlagen. Ziel dieses Vorgehens war es, Möglichkeiten zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit des ursprünglichen Verfahrens von E. Lelarasemee zu eröffnen und die Klasse von MOS-Schaltungen, deren Transientenanalyse mit der Waveform Relaxation effizient durchgeführt werden kann, insbesondere im Hinblick auf die Untersuchung von Rückkopplungen zu vergrößern. Die Algorithmen von E. Lelarasemee sind als Spezialfälle der modifizierten Waveform Relaxation, die im Folgenden als AWR-Algorithmus bezeichnet wird, mit den Relaxationsparametern $\alpha = 0$ und $\omega = 1$ (Gauss-Jacobi-Waveform Relaxation) bzw. $\alpha = \omega = 1$ (Gauss-Seidel Waveform Relaxation) zu erkennen.

In TEIL 1 wird unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen, die Konvergenz des AWR-Algorithmus bewiesen, indem er als Kontraktion auf einer geeigneten Teilmenge des $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ dargestellt wird. Dabei wird eine Differentialungleichung hergeleitet, die die Konvergenzgeschwindigkeit

des AWR-Algorithmus in Abhängigkeit von den Relaxationsparametern α und ω regiert. Ferner zeigt ein zweiter Konvergenzsatz, daß sich die Konvergenz des AWR-Algorithmus durch eine geeignete Beschränkung des zugrunde liegenden Zeitintervalls $[0, T]$ sichern läßt. Als charakteristisch für die Waveform Relaxation stellt sich schließlich ein Fehlerwachstum heraus, das exponentiell zum rechten Rand T des Zeitintervalls $[0, T]$ ansteigt. Um dafür eine möglichst scharfe Abschätzung zu gewinnen, werden aufbauend auf Arbeiten von G. Dahlquist und G. Söderlind sog. logarithmische Matrixnormen eingesetzt.

In natürlicher Weise ergibt sich aus der Modifizierung der Waveform Relaxation zu einem zweiparametrigen Verfahren die Frage nach einer optimalen Wahl der Relaxationsparameter α und ω , deren Beantwortung in TEIL 2 mit zwei verschiedenen Ansätzen angestrebt wird:

Der erste Ansatz stützt sich auf Abschätzungen aus TEIL 1. Für lineare, implizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die das elektrische Verhalten gewisser einfacher MOS-Schaltungen beschreiben, werden zunächst günstige Relaxationsparameter α und ω mit $\alpha = \omega$ als Lösung einer geeigneten quadratischen Gleichung ohne Bestimmung von Eigenwerten gewonnen. Im allgemeinen Fall führt die den MOS-Gleichungen gemäß TEIL 1 zugeordnete Differentialgleichung, welche die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus charakterisiert, auf ein dynamisches Optimierungsproblem mit nichtholonomen Nebenbedingungen. Dadurch ist es möglich, unter recht allgemeinen Bedingungen die Existenz von optimalen Relaxationsparametern α und ω nachzuweisen. α und ω ergeben sich dabei als integrierbare Funktionen über dem Zeitintervall $[0, T]$. Die numerische Bestimmung von α und ω nach der Bellman'schen Funktioneleichungs-Methode, wie sie für ein derartiges Optimierungsproblem von K. Neumann (36) beschrieben wird, verbietet sich hier aus Aufwandsgründen.

Um ein praktikables Optimierungsverfahren zur Konstruktion der Parameterfunktionen α und ω zu erhalten, werden zeitlich lokale Optimierungsprobleme unter Verwendung der (stetig

differenzierbaren) euklidischen Norm im $\mathbb{R}^n$ für die Differenz zweier aufeinanderfolgenden, durch den AWR-Algorithmus erzeugten Näherungslösungen formuliert. Über die zugehörigen Kuhn-Tucker-Bedingungen führt dieser zweite Ansatz auf ein System von partiellen Differentialgleichungen. Auf der Basis eines geeigneten, durch umfangreiche Testrechnungen motivierten Separationsansatzes wird aus diesem System eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitet, die für jeden Relaxationsschritt unter der Voraussetzung $\alpha = \omega$ und mit der Anfangsbedingung $\omega(0) = 1$ eine Parameterfunktion $\omega^{(k)}$ liefert. Die Folge $(\omega^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ erfüllt dann die Kuhn-Tucker-Bedingungen "im Limes" (d.h. für $k \rightarrow \infty$) und konvergiert punktweise, falls der AWR-Algorithmus konvergiert.

In Hinsicht auf das bereits angesprochene zweite Ziel unserer Verbesserung, die Nutzbarmachung der Waveform Relaxation für eine größere Klasse von MOS-Schaltungen, wird in TEIL 3 untersucht, wie sich die Waveform Relaxation bei Anwendung in der Transientenanalyse von MOS-Schaltungen mit globalen Rückkopplungen verhält. Anhand eines MOS-Schaltungsmodells wird dazu zunächst die Herleitung der Schaltungsgleichungen aus der Schaltungstopologie und den Zustandsgleichungen für die Schaltungselemente unter Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze betrachtet. Es wird schließlich bewiesen, daß die Waveform Relaxation die simultane Erfüllung der beiden Kirchhoff'schen Gesetze für die Spannungen und Ströme einer MOS-Schaltung nicht gewährleistet, falls globale Rückkopplungen existieren. Diesem Umstand kann im AWR-Algorithmus durch eine schaltungstopologisch begründete, lokale Wahl von $\alpha = 0$ auf einfache Weise abgeholfen werden.

Im Hinblick auf die rasch zunehmende Packungsdichte auf integrierten Schaltungen wird in TEIL 4 eine einführende Darstellung der Problematik der Simulation von Übersprechungseigenschaften (cross talk) zwischen leitenden Verbindungen auf MOS-Schaltungen vorgestellt. Ein Leitungsmodell, welches kapazitive und induktive Kopplungen paralleler Bandleitungen berücksich-

tigt, führt auf ein System partieller Differentialgleichungen, das als verallgemeinerte Telegraphengleichung identifiziert werden kann. Eine Semidiskretisierung bezüglich der Raumvariablen erzeugt daraus ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das eine Einbindung in die Transientenanalyse mit der Waveform Relaxation ermöglicht. An den Enden der Bandleitungen werden mit Hilfe der Theorie der sog. Pseudodifferentialoperatoren einlaufende bzw. auslaufende Differentiationsrichtungen charakterisiert, um zur Einbindung in eine gegebene Schaltungs-umgebung Randbedingungen konstruieren zu können, welche die cross-talk-Gleichungen zu einem sachgemäß gestellten Anfangs-Randwertproblem ergänzen.

Als Testbeispiele für den AWR-Algorithmus sind in TEIL 5 MOSFET-Inverter-Ketten und Ringoszillatoren gewählt. Es wird damit gezeigt, daß durch eine geeignete Wahl der Relaxationsparameter die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit der Algorithmen von E. Lelasmee beträchtlich gesteigert werden kann. Zur weiteren Beschleunigung des Verfahrens wird die Waveform Relaxation auf Teilintervallen des zugrundeliegenden Zeitintervalls $[0, T]$, den sog. Zeitfenstern [siehe (39)], durchgeführt. In der einschlägigen Literatur sind für eine automatische Steuerung der Länge der Zeitfenster keine brauchbaren Ergebnisse zu finden. Das in TEIL 2 hergeleitete Optimierungsverfahren für die Relaxationsparameter kann jedoch nach den hier aufgeführten numerischen Experimenten auch zur Bestimmung der Zeitfenster herangezogen werden.

Das Verhalten des AWR-Algorithmus bei der Analyse von MOS-Schaltungen mit globalen Rückkopplungen wird am Beispiel des Ringoszillators demonstriert; die Störung der Kirchhoffschen Gesetze wird dabei gemäß TEIL 3 berechnet.

Herrn Prof. Dr. W. Richert danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und Ihre Unterstützung in vielen hilfreichen Diskussionen. Ferner gilt mein Dank Herrn Dipl. Math. Dr. U. Feldmann von der Siemens AG, ZTI DES VENUS 2, für sein

ständiges Interesse an dieser Arbeit und seine Beratung in Fragen der praktischen Schaltungssimulation. Frau Kottmayr danke ich für die sorgfältigen Schreibarbeiten.

TEIL 1: DIE ZWEIPARAMETRIGE WAVEFORM RELAXATION UND IHRE GRUNDLEGENDEN KONVERGENZEIGENSCHAFTEN

Ausgehend von einem Anfangswertproblem für ein großes System impliziter, gewöhnlicher Differentialgleichungen wird die von E. Lelarasmee 1982 vorgestellte Waveform Relaxation in Abschnitt 1.1 in zwei Schritten dargestellt: Nach einer Partitionierung des gegebenen Systems in Teilanfangswertprobleme wird im ersten Schritt eine Entkopplungsfunktion definiert, die dann im zweiten Schritt die sukzessive Lösung der Teilanfangswertprobleme im Rahmen eines Relaxations-Algorithmus auf dem Raum $C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ erlaubt. Durch Verallgemeinerung der Entkopplungsfunktion erhält man daraus ein maximal zweiparametrisches Relaxationsverfahren, das die von E. Lelarasmee gefundenen Algorithmen als Spezialfälle enthält.

In Abschnitt 1.2 werden Konvergenzeigenschaften der zweiparametrischen Waveform Relaxation untersucht, die für die praktische Nutzung dieses Verfahrens wesentliche Bedeutung haben. Aufgrund von Voraussetzungen, wie sie hauptsächlich von MOS-Schaltungen erfüllt werden, wird ein erster Konvergenzsatz bewiesen, dessen Aussagen hinsichtlich der Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit (ein zweiter Konvergenzsatz) und des Fehlerwachstums von der Länge des Zeitintervalls präzisiert werden. Dabei werden als Hilfsmittel sog. logarithmische Matrixnormen und Dahlquistkonstanten genützt.

1.1 Die Waveform Relaxation von E. Lelarasmee und ihre Erweiterung zu einem zweiparametrischen Relaxationsverfahren

1.1.1 Beschreibung des Verfahrens von E. Lelarasmee

Gegeben sei ein dynamisches System, dessen Verhalten durch ein Anfangswertproblem für ein System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben wird, das folgende Form hat:

(1.1.1.1) ANFANGSWERTPROBLEM:

Voraussetzungen:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^n$, $D_{\underline{\xi}} \subset X$ offen und konvex, $D_{\underline{\xi}} \neq \emptyset$.

Sei $\underline{\sigma} \in D_{\underline{\xi}}$, $T > 0$.

$$\begin{aligned} \underline{f} : X \times X \times \mathbb{R} \supset X \times D_{\underline{\xi}} \times [0, \infty) &\longrightarrow X \\ (\underline{\xi}', \underline{\xi}, t) &\longmapsto \underline{f}(\underline{\xi}', \underline{\xi}, t) \end{aligned}$$

sei stetig differenzierbar in $\underline{\xi}'$ auf X und in $\underline{\xi}$ auf $D_{\underline{\xi}}$ und sei stetig in t auf $[0, \infty)$ und es gelte:

$$\forall \underline{\xi}' \in X, \underline{\xi} \in D_{\underline{\xi}} : \det \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{\xi}', \underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}'} \right) \neq 0.$$

Problem:

Gesucht ist eine (eindeutige) Lösung $\underline{p} \in C^1([0, T], X)$ des Anfangswertproblems

$$\underline{f}(\underline{p}', \underline{p}, t) = 0 \text{ auf } [0, T] \text{ mit } \underline{p}(0) = \underline{\sigma}.$$

In der Praxis wird der Anfangswert $\underline{g} \in D_{\underline{f}}$ mit Hilfe eines geeigneten $\underline{g}' \in X$ berechnet, indem das Gleichungssystem

$$\underline{f}(\underline{g}', \underline{g}, 0) = 0$$

gelöst wird. Um auf dieses zusätzliche Problem, das dem AWP (1.1.1.1) stets vorangestellt ist, hinzuweisen, wird anstelle der Anfangsbedingung $\underline{p}(0) = \underline{g}$ die Formulierung

$$\underline{\dot{p}}(0) = \underline{g}', \quad \underline{p}(0) = \underline{g} \quad \text{mit} \quad \underline{f}(\underline{g}', \underline{g}, 0) = 0$$

gewählt.

Die Waveform Relaxation zur Lösung des obigen Anfangswertproblems wird nun in zwei Schritten durchgeführt: Einer geeigneten Partitionierung (assignment-partitioning process) folgt die Relaxation (relaxation process) in einem geeigneten Funktionenraum [vgl. (28), p. 32-35].

(1.1.1.2) DEFINITION:

Seien $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X = \mathbb{R}^n$

sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$ ($j = 1, \dots, l$)

gegeben. Ferner sei für $T > 0$

$$C^1([0, T], X) := \{ \underline{x} : [0, T] \rightarrow X : \underline{x} \text{ stetig differenzierbar} \}$$

$$C^1([0, T], X_j) := \{ \underline{x} : [0, T] \rightarrow X_j : \underline{x} \text{ stetig differenzierbar} \}.$$

Das AWP (1.1.1.1) heißt dann "gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ partitioniert", wenn gilt:

$$\underline{g}' = (\underline{g}'_j)_{j=1(1)l} \quad \text{mit} \quad \underline{g}'_j \in X_j, \quad ,$$

$$\underline{g} = (\underline{g}_j)_{j=1(1)l} \quad \text{mit} \quad \underline{g}_j \in X_j, \quad ,$$

$$\underline{f} = (\underline{f}_j)_{j=1(1)l} \quad \text{mit}$$

$$\underline{f}_j : X \times D_{\underline{\xi}} \times [0, \infty) \rightarrow X_j$$

$$(\underline{\xi}', \underline{\xi}, t) \rightarrow \underline{f}_j(\underline{\xi}', \underline{\xi}, t) .$$

Die den gesuchten Teilvektorfunktionen $p_j \in C^1([0, T], X_j)$ der gesuchten Vektorfunktion $\underline{p} = (p_j)_{j=1(1)l} \in C^1([0, T], X) = \prod_{j=1}^l C^1([0, T], X_j)$ zugeordneten Anfangswertprobleme

$$\underline{f}_j(\dot{\underline{p}}, \underline{p}, t) = 0 \quad \text{auf } [0, T] \quad \text{mit}$$

$$\dot{\underline{p}}_j(0) = \underline{\sigma}_j' , \quad \underline{p}_j(0) = \underline{\sigma}_j ,$$

$$\text{für } j = 1, \dots, l$$

heißen "Teilanfangswertprobleme" (TAWP) von AWP (1.1.1.1).

(1.1.1.3) DEFINITION: "WR-Algorithmen":

Gegeben sei das AWP (1.1.1.1) mit der in Definition (1.1.1.2) angegebenen Partitionierung. Ferner seien folgende "Entkoppelungsfunktionen (decoupling functions) gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ " für $j = 1, \dots, l$ definiert:

$$\underline{\delta}^{GJ, j} : \left(\prod_{j=1}^l X_j \right) \times \left(\prod_{j=1}^l X_j \right) \rightarrow X = \prod_{j=1}^l X_j$$

$$\underbrace{((\xi_j)_{j=1(1)1})}_{=: \underline{\xi}} , \underbrace{(\eta_j)_{j=1(1)1})}_{=: \underline{\eta}} \mapsto \underline{\delta}^{GJ,j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{j-1} \\ \xi_j \\ \eta_{j+1} \\ \vdots \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

(Gauss-Jacobi-Entkopplungsfunktion)

und

$$\underline{\delta}^{GS,j} : \left(\prod_{j=1}^1 x_j \right) \times \left(\prod_{j=1}^1 x_j \right) \longrightarrow x = \prod_{j=1}^1 x_j$$

$$\underbrace{((\xi_j)_{j=1(1)1})}_{=: \underline{\xi}} , \underbrace{(\eta_j)_{j=1(1)1})}_{=: \underline{\eta}} \mapsto \underline{\delta}^{GS,j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{j-1} \\ \xi_j \\ \eta_{j+1} \\ \vdots \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

(Gauss-Seidel-Entkopplungsfunktion)

Sei $\underline{s} \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$ mit $\dot{\underline{s}}(0) = \underline{\sigma}'$, $\underline{s}(0) = \underline{\sigma}$ und $\underline{s}([0, T]) \subset D_{\underline{\xi}}$.

Die WR-Algorithmen (waveform relaxation) von E.

haben damit folgende Darstellung:

0-ter Schritt:

Setze $\underline{p}(0) = \underline{s}$ (initial waveform)

k-ter Schritt: ($k = 1, 2, \dots$)

Löse für $j = 1, \dots, l$ sukzessive nach $\underline{p}_j^{(k)}$ die AWP's

$$\underline{f}_j(\underline{\delta}^{XX,j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}), \underline{\delta}^{XX,j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}), t) = 0 \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \underline{p}_j^{(k)}(0) = \underline{\sigma}_j', \quad \underline{p}_j^{(k)}(0) = \underline{\sigma}_j,$$

wobei $XX = GS$ oder $XX = GJ$ zu setzen ist.

Die Algorithmen heißen GSWR-Algorithmus für $XX = GS$ (Gauss-Seidel waveform relaxation) und GJWR-Algorithmus für $XX = GJ$ (Gauss-Jacobi waveform relaxation).

(1.1.1.4) BEMERKUNGEN zu Definition (1.1.1.3):

a) Eine geeignete, einfach zu berechnende Startlösung

$\underline{s} \in C^1([0, T], X)$ (stückweise) kann wie folgt gewonnen werden:

Da $D_{\underline{\xi}}$ offen und konvex ist und $\underline{g} \in D_{\underline{\xi}}$ gilt, erhält man:

$\exists 0 < t_0 \leq T : \underline{g} + t_0 \underline{g}' \in D_{\underline{\xi}}$. Damit kann man $\underline{s}$ wie folgt fest-

legen:

$$\underline{s}(t) := \begin{cases} \underline{g} + t \underline{g}' & \text{für } 0 \leq t < t_0 \\ \underline{g} + t_0 \underline{g}' & \text{für } t_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$\underline{s}$ ist dann i.a. nur stückweise stetig differenzierbar¹⁾ auf $[0, T]$.

b) Die Iteration aus (1.1.1.3) wird abgebrochen, falls für die Lösungen $\underline{p}^{(k-1)}$ und $\underline{p}^{(k)}$ zweier aufeinanderfolgender Relaxationsschritte gilt:

$$\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\| < \varepsilon ,$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine vorgegebene Schranke und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X ist.

1.1.2 Relaxationsparameter für die Waveform Relaxation

Die klassischen Relaxationsverfahren zur Lösung linearer und nichtlinearer Gleichungssysteme können durch den Einsatz von geeignet gewählten Relaxationsparametern wesentlich bessere Konvergenzeigenschaften erhalten.

A. Hadjidimos [siehe (18)] hat eine zweiparametrische Verallgemeinerung des SOR-Verfahrens zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme gefunden. Sie ist bezüglich der Anzahl der möglichen Relaxationsparameter maximal und wurde zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, wie sie bei der Diskretisierung elliptischer partieller Differentialgleichungen auftreten, erfolgreich eingesetzt [siehe (19)] .

In analoger Weise soll nun die Waveform Relaxation mit Hilfe von Relaxationsparametern modifiziert werden. Es zeigt sich,

1) siehe Satz (1.2.1.6)

daß auch hier maximal zwei Parameter eingesetzt werden können. Die WR-Algorithmen von E. Lelarmsee, GSWR und GJWR, treten dabei als Spezialfälle auf.

Die Wirkungsweise der WR-Algorithmen GSWR und GJWR wird durch die Entkopplungsfunktionen $\underline{\delta}^{GS,j}$ und $\underline{\delta}^{GJ,j}$ bestimmt [siehe Definition (1.1.1.3)]. Im k-ten Relaxationsschritt werden dabei bei der Lösung des j-ten Teilanfangswertproblems nach $\underline{p}_j^{(k)}$ die Lösung $\underline{p}^{(k-1)}$ des (k-1)-ten Relaxationsschrittes sowie die Teillösungen $\underline{p}_1^{(k)}, \dots, \underline{p}_{j-1}^{(k)}$ der ersten j-1 Teilanfangswertprobleme benutzt. Um eine zunächst beliebige Gewichtung dieser Informationen für die Berechnung von $\underline{p}_j^{(k)}$ zu gewährleisten, ist eine Entkopplungsfunktion mit fünf Parametern zu wählen:

(1.1.2.1) DEFINITION:

Seien $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $x \in \mathbb{R}^n$ sei die Zerlegung $x = \prod_{j=1}^l x_j$ mit $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ ($j = 1, \dots, l$) gegeben.

Sei $\underline{\alpha} := (\alpha_i)_{i=1(1)5} \in \mathbb{R}^5$ mit $\alpha_i \geq 0$. Dann heißt für

$j = 1, \dots, l$

$$\underline{\delta}^{\underline{\alpha},j} : \left(\prod_{j=1}^l x_j \right) \times \left(\prod_{j=1}^l x_j \right) \longrightarrow x$$

$$((\xi_j)_{j=1}^1(1)1, (\eta_j)_{j=1}^1(1)1) \xrightarrow{\delta^{\underline{\alpha}, j}} (\xi, \eta) := \begin{pmatrix} \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \eta_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \xi_{j-1} + \alpha_2 \eta_{j-1} \\ \alpha_3 \xi_j + \alpha_4 \eta_j \\ \alpha_5 \eta_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_5 \eta_1 \end{pmatrix}$$

$$=: \underline{\xi} \quad \quad \quad =: \underline{\eta}$$

"verallgemeinerte Entkopplungsfunktion" für den WR-Algorithmus.

(1.1.2.2) LEMMA:

Voraussetzungen:

- a) Seien $u, l, u_1, \dots, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X := \mathbb{R}^n$ sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j = \mathbb{R}^{n_j}$ ($j=1, \dots, l$) gegeben.
- b) Das Anfangswertproblem (1.1.1.1) sei gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ partitioniert [siehe (1.1.1.2)] und es sei eindeutig lösbar.
- c) $\underline{p}^* \in C^1([0, T], X)$ sei Lösung von (1.1.1.1), $\underline{p}^* \neq 0$.
- d) Die verallgemeinerte Kopplungsfunktion $\delta^{\underline{\alpha}, j}$ sei wie in (1.1.2.1) definiert und es sei $\alpha_j \neq 0$.
- e) es gelte für $j = 1, \dots, l$:

$$f_j(\delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*), \delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*), t) = 0 \quad \text{auf } [0, T]$$

Behauptung:

Für den Parametervektor $\underline{\alpha}$ gilt dann:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 1$$

Beweis:

Wegen c) und e) gilt auf $[0, T]$ für $j = 1, \dots, l$:

$$f_j(\delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*), \delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*), t) = f_j(\underline{p}^*, \underline{p}^*, t) = 0$$

Mit b) folgt daraus:

$$\delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*) = \underline{p}^* \quad \text{und} \quad \delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}(\underline{p}^*, \underline{p}^*) = \underline{p}^*$$

Also gilt wegen $\underline{p}^* \neq 0$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 1. \quad \square$$

Lemma (1.1.2.2) gibt Bedingungen an $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^5$ an, die garantieren, daß der mit Hilfe der verallgemeinerten Entkopplungsfunktion $\delta_{\underline{p}}^{\underline{\alpha},j}$, $j = 1, \dots, l$, gemäß (1.1.1.3) definierte WR-Algorithmus konsistent mit dem Anfangswertproblem (1.1.1.1) ist. Es gilt dabei

$$\dim \{ \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 1 \} = 2.$$

Setzt man nun o.B.d.A

$$\alpha_1 := \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{und} \quad \alpha_3 := \frac{1}{\omega} ,$$

wobei $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha$ und $0 < \omega$ zunächst so gewählt werden, daß gilt:

$$\underline{\xi}, \underline{\eta} \in D_{\underline{\xi}} \Rightarrow \underline{\delta}^{\alpha, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \in D_{\underline{\xi}} \quad \text{für } j = 1, \dots, l .$$

Ferner ergibt sich damit:

$$\alpha_2 = 1 - \frac{\alpha}{\omega} , \quad \alpha_4 = 1 - \frac{1}{\omega} .$$

Als Spezialfälle liefern $\alpha := 0$, $\omega := 1$ den GJWR-Algorithmus und $\alpha := 1$, $\omega := 1$ den GSWR-Algorithmus von E. Lelarsmee. Zusammenfassend erhält man schließlich

(1.1.2.3) DEFINITION : "AWR-Algorithmus"

Seien $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X = \mathbb{R}^n$ sei

die Zerlegung $X = \coprod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j = \mathbb{R}^{n_j}$ ($j = 1, \dots, l$) gegeben.

Für $j = 1, \dots, l$ und $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq \omega$ und $0 < \omega$

sei dann

$$\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j} : \left(\coprod_{j=1}^l X_j \right) \times \left(\coprod_{j=1}^l X_j \right) \longrightarrow X$$

$$((\underline{\xi}_j)_{j=1(1)1}, (\underline{\eta}_j)_{j=1(1)1}) \mapsto \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\omega} \underline{\xi}_1 + (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \frac{\alpha}{\omega} \underline{\xi}_{j-1} + (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \underline{\eta}_{j-1} \\ \frac{1}{\omega} \underline{\xi}_j + (1 - \frac{1}{\omega}) \underline{\eta}_j \\ \vdots \\ \underline{\eta}_{j+1} \\ \vdots \\ \underline{\eta}_1 \end{pmatrix}$$

die "Entkopplungsfunktion für den AWR-Algorithmus".

Gegeben sei ferner das AWP (1.1.1.1), partitioniert gemäß

$$X = \prod_{j=1}^1 X_j.$$

Sei $\underline{s} \in C^1([0, T], X)$ mit $\dot{\underline{s}}(0) = \sigma'$, $\underline{s}(0) = \underline{g}$ und $\underline{s}([0, T]) \subset D_{\underline{\xi}}$.

Der AWR-Algorithmus (accelerated waveform relaxation) dazu sei dann gegeben durch:

0-ter Schritt:

$$\text{Setze } \underline{p}^{(0)} := \underline{s}$$

k-ter Schritt: ($k = 1, 2, \dots$)

Löse für $j = 1, \dots, l$ sukzessive nach $\underline{p}_j^{(k)}$ die AWP's

$$\underline{f}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}_j^{(k)}, \dot{\underline{p}}_j^{(k-1)}), \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}_j^{(k)}, \underline{p}_j^{(k-1)}, t) = 0 \text{ auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \dot{\underline{p}}_j^{(k)}(0) = \underline{g}'_j, \quad \underline{p}_j^{(k)}(0) = \underline{g}_j.$$

1.2 Zur Konvergenz der zweiparametrischen Waveform Relaxation

Um einen Konvergenzbeweis führen zu können, transformierte E. Lelarsmee das Anfangswertproblem, das aus (1.1.1.1) durch Anwendung der Waveform Relaxation entsteht [siehe Definition (1.1.1.3)], in eine sog. "kanonische Form (canonical form)"

$$\dot{\underline{p}}^{(k)} = \tilde{\underline{f}}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{p}}^{(k-1)}, t) \quad \text{auf } [0, T]$$

und fordert die Kontraktivität von $\tilde{\underline{f}}$ in $\dot{\underline{p}}^{(k-1)}$ und die Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{\underline{f}}$ in $\underline{p}^{(k-1)}$ und $\underline{p}^{(k)}$ als wesentliche Konvergenzbedingungen [vgl. (28), Chapter 5, insbes. Theorem 5.3]. Für die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen lassen sich nur in den meisten Fällen direkt aus der Schaltungsbeschreibung Konvergenzbedingungen, wie sie in Abschnitt 1.2.1 angegeben werden, gewinnen.

Abschnitt 1.2.2 gibt eine knappe Zusammenfassung über logarithmische Matrixnormen und Dahlquist-Konstanten.

In Abschnitt 1.2.3 wird ein zweiter Konvergenzsatz für die zweiparametrische Waveform Relaxation formuliert, der im Gegensatz zum ersten Konvergenzsatz (1.2.1.6) nichtvariable Normen verwendet und eine Schranke für das Zeitintervall als Konvergenzbedingung enthält. Das experimentielle Fehlerwachstum zum rechten Rand des Zeitintervalls hin charakterisiert schließlich Satz (1.2.3.3).

1.2.1 Der Konvergenzsatz für den AWR-Algorithmus

E. Lelarsmee hat einen Konvergenzsatz angegeben, der unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, die Konvergenz der Waveform Relaxation bei der Lösung von Algebraisch-differentialgleichungssystemen sichert. Sein Beweis stützt sich auf den Satz von Picard-Lindelöf und den Banach'schen Fixpunktsatz [vgl. dazu (28), p. 60, Theorem 5.3].

Im folgenden soll mit einer analogen Beweisführung ein Konvergenzsatz für den AWR-Algorithmus aus Definition (1.1.2.3) geliefert werden. Dabei werden Voraussetzungen gemacht, die keinen Anspruch auf größtmögliche Allgemeinheit erheben, jedoch von den Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen meistens erfüllt werden [vgl. dazu TEIL 2]. Aufgrund dieses Beweises wird eine a-priori-Fehlerabschätzungen hergeleitet, die zwar für numerische Auswertungen ungeeignet ist, aber qualitativ das für die Waveform Relaxation typische Konvergenzverhalten mit experimentiell zum rechten Rand des Integrationsintervalls $[0, T]$ hin wachsenden Fehler erkennen läßt. Ferner zeigt sich dabei, daß die Anzahl der Relaxationsschritte bei einer vorgegebenen, festen Fehlerschranke linear mit der Länge des Integrationsintervalls zunimmt.

Für den Beweis des Konvergenzsatzes zum AWR-Algorithmus werden zunächst einige Hilfssätze bereitgestellt.

(1.2.1.1) LEMMA und DEFINITION:

Voraussetzungen

Seien $\beta > 0$, $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^n$. $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf

X , so daß $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Für $\underline{x} \in C^1([0, T], X)$ sei

$$\|\underline{x}\|_{C^1, \beta, \gamma} := \max_{t \in [0, T]} (e^{-\beta t} (\|\dot{\underline{x}}(t)\| + \gamma \|\underline{x}(t)\|)) .$$

Behauptung:

a) $\|\cdot\|_{C^1}$ ist eine Norm auf $C^1([0, T], X)$ und

$(C^1([0, T], X), \|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma})$ ist ein Banachraum.

b) Es gilt für alle $\underline{x} \in C^1([0, T], X)$:

$$e^{-\beta T} \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{x}}(t)\| + \gamma \|\underline{x}(t)\|) \leq \|\underline{x}\|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{x}}(t)\| + \gamma \|\underline{x}(t)\|) .$$

Beweis:

1) Definiere für $\underline{z} \in C([0, T], X)$: $\|\underline{z}\|_C := \max_{t \in [0, T]} \|\underline{z}(t)\|$.

Dann ist $(C([0, T], X), \|\cdot\|_C)$ ein Banachraum. [vgl. dazu etwa (8), p. 43f].

2) Wegen $\gamma > 0$ und $\forall t \in [0, T] : e^{-\beta t} \leq 1$ (da $\beta > 0$)

gilt für $\underline{z} \in (C^1([0, T], X))$:

$$\begin{aligned}
 \| \underline{z} \|_{C^1, \beta, \gamma} &= \max_{t \in [0, T]} (e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \| \underline{z}(t) \|)) \\
 &\leq \max_{t \in [0, T]} \| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \max_{t \in [0, T]} \| \underline{z}(t) \| \\
 &= \| \dot{\underline{z}} \|_C + \gamma \| \underline{z} \|_C
 \end{aligned}$$

3) Für $\underline{z} \in (C^1[0, T], X)$ gilt ferner wegen $\beta > 0$, $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}
 \| \underline{z}(t) \| &\leq \frac{e^{\beta t}}{\gamma} e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \| \underline{z}(t) \|) \\
 &\leq \frac{e^{\beta T}}{\gamma} \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \| \underline{z}(t) \|) \quad \text{für } t \in [0, T]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \| \dot{\underline{z}}(t) \| &\leq e^{\beta t} e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \| \underline{z}(t) \|) \\
 &\leq e^{\beta T} \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{z}}(t) \| + \gamma \| \underline{z}(t) \|) \quad \text{für } t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\| \underline{z} \|_C \leq \frac{e^{\beta T}}{\gamma} \| \underline{z} \|_{C^1, \beta, \gamma} \quad \text{und} \quad \| \dot{\underline{z}} \|_C \leq e^{\beta T} \| \underline{z} \|_{C^1, \beta, \gamma}.$$

4) Sei nun $(\underline{z}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C^1([0, T], X), \| \cdot \|_{C^1, \beta, \gamma})$.

Wegen 3) sind dann $(\underline{z}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\dot{\underline{z}}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folgen im Banachraum $(C([0, T], X), \|\cdot\|_C)$. Also gilt:

$$\exists \underline{z} \in C([0, T], X) : \lim_{j \rightarrow \infty} \|\underline{z} - \underline{z}^{(j)}\|_C = 0 ,$$

$$\exists \underline{y} \in C([0, T], X) : \lim_{j \rightarrow \infty} \|\underline{y} - \dot{\underline{z}}^{(j)}\|_C = 0 ,$$

Ferner gilt für alle $t \in [0, T]$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|z^{(j)}(t) - z(t)\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\dot{\underline{z}}^{(j)}(t) - \underline{y}(t)\| = 0 .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(\underline{z}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left\| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{z}(t+h) - \underline{z}(t)}{h} - \underline{y}(t) \right\| \\ &= \left\| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \underline{z}_j(t+h) - \lim_{j \rightarrow \infty} \underline{z}_j(t) \right\} - \underline{y}(t) \right\| \\ &= \left\| \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \left\{ \underline{z}_j(t+h) - \underline{z}_j(t) \right\} - \underline{y}(t) \right\| \\ &= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \underline{z}_j(t+h) - \underline{z}_j(t) \right\} - \underline{y}(t) \right\| \\ &= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} \dot{\underline{z}}_j(t) - \underline{y}(t) \right\| = 0 \end{aligned}$$

Somit ist $\underline{z} \in C^1([0, T], X)$ mit $\dot{\underline{z}} = \underline{y}$.

5) Mit 2) und 4) folgt schließlich:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|z_j - z\|_{C^1, \beta, \gamma} = 0 ;$$

damit gilt Behauptung a).

Behauptung b) erhält man aus 2) und 3).

□

(1.2.1.2) LEMMA : [siehe (20), p. 32, Corollary 6.2]

Voraussetzungen:

Sei $\xi_0 > 0$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend.

Sei $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$\xi \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ sei eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\xi} = q(t, \xi) \quad \text{auf } [0, T] \quad \text{mit } \xi(0) = \xi_0 .$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ Norm auf $X := \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \in C^1([0, T], X)$ und $[0, T] \times \underline{x}([0, T]) \subset \Omega$. Es gelte ferner :

$$\|\underline{x}(0)\| \leq \xi_0 \quad \text{und} \quad \forall t \in [0, T] : \|\dot{\underline{x}}(t)\| \leq q(t, \|\underline{x}(t)\|)$$

Behauptung:

$$\forall t \in [0, T] : \|\underline{x}(t)\| \leq \xi(t)$$

(1.2.1.3) LEMMA

Voraussetzungen:

Sei $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$.

Für $v, \mu \in \{n, n_1, \dots, n_l\}$ seien $\|\cdot\|_v$ Normen auf $\mathbb{R}^v$ und mit $\|\cdot\|_{\mu, v}$ sei die durch $\|\cdot\|_\mu, \|\cdot\|_v$ auf $\mathbb{R}^{\mu, v}$ induzierte Matrix-Norm bezeichnet, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{\mu, v}$ ist

$$\|A\|_{\mu, v} := \sup_{\substack{\zeta \in \mathbb{R}^v \\ \|\zeta\|_v = 1}} \|A \cdot \zeta\|_\mu.$$

Für $\zeta := (\zeta_j)_{j=1(1)l} \in \mathbb{R}^n = \prod_{j=1}^l \mathbb{R}^{n_j}$ gelte

$$\|\zeta\|_n := \max_{j=1(1)l} \|\zeta_j\|_{n_j}.$$

Sei $A := (A_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$.

Behauptung:

$$\|A\|_{n,n} = \max_{j=1(1)l} \|(A_{j1} \ A_{j2} \ \dots \ A_{jl})\|_{n_j, n}$$

Beweis:

Es ist klar, daß durch $\|\zeta\|_n := \max_{j=1(1)l} \|\zeta_j\|_{n_j}, \zeta := (\zeta_j)_{j=1(1)l} \in \mathbb{R}^n$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n = \prod_{j=1}^l \mathbb{R}^{n_j}$ definiert wird.

Sei nun $A := (A_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$.

Da $\{\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{\xi}\|_n = 1\}$ kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist und $\|\cdot\|_{n_j}$ als Normen stetige Funktionen sind, gibt es für $j = 1, \dots, l$ Vektoren $\underline{\xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\underline{\xi}^{(j)}\|_n = 1$ so daß gilt:

$$\|A\|_{n,n} = \sup_{\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n} \|A \underline{\xi}\|_n$$

$$= \sup_{\substack{\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n \\ \|\underline{\xi}\|_n = 1}} \max_{j=1(1)l} \|(A_{j1} \dots A_{jl}) \underline{\xi}\|_{n_j}$$

$$\geq \sup_{\substack{\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n \\ \|\underline{\xi}\|_n = 1}} \|(A_{j1} \dots A_{jl}) \underline{\xi}\|_{n_j}$$

$$= \|(A_{j1} \dots A_{jl}) \underline{\xi}^{(j)}\|_{n_j}$$

Sei o.E. $\max_{j=1(1)l} \|(A_{j1} \dots A_{jl}) \underline{\xi}^{(j)}\| = \|(A_n \dots A_{11}) \underline{\xi}^{(1)}\|_{n_1}$.

Damit gilt:

Für jedes $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\underline{\xi}\|_n = 1$ gibt es ein $j(\underline{\xi}) \in \{1, \dots, l\}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
 & \max_{j=1(1)1} \| (A_{j1} \dots A_{j2}) \underline{\xi} \|_{n_j} \\
 &= \| (A_{j(\underline{\xi}),1} \dots A_{j(\underline{\xi}),1}) \underline{\xi} \|_{n_{j(\underline{\xi})}} \\
 &\leq \sup_{\underline{\zeta} \in \mathbb{R}^n} \| (A_{j(\underline{\xi}),1}, \dots, A_{j(\underline{\xi}),1}) \underline{\zeta} \|_{n_{j(\underline{\xi})}} \\
 &\quad \| \underline{\zeta} \|_n = 1 \\
 &= \| (A_{j(\underline{\xi}),1} \dots A_{j(\underline{\xi}),1}) \underline{\zeta}^{(j(\underline{\xi}))} \|_{n_{j(\underline{\xi})}} \\
 &\leq \| (A_{n1} \dots A_{11}) \underline{\zeta}^{(1)} \|_{n_1}
 \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned}
 \| A \|_{n,n} &= \sup_{\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n} \max_{j=1(1)1} \| (A_{j1} \dots A_{j1}) \underline{\xi} \|_{n_j} \\
 &\quad \| \underline{\xi} \|_n = 1 \\
 &\leq \| (A_{11} A_{12} \dots A_{11}) \underline{\zeta}^{(1)} \|_{n_1} .
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 & \| (A_{11} \dots A_{11}) \underline{\zeta}^{(1)} \|_{n_1} \\
 &= \max_{j=1(1)1} \sup_{\underline{\zeta} \in \mathbb{R}^n} \| (A_{j1} \dots A_{j1}) \underline{\zeta} \|_{n_j} \\
 &\quad \| \underline{\zeta} \|_n = 1 \\
 &= \max_{j=1(1)1} \| (A_{j1} \dots A_{j1}) \|_{n_j, n}
 \end{aligned}$$

erhält man schließlich die Behauptung. $\square$

(1.2.1.4) LEMMA:

Voraussetzungen:

a) Seien $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X = \mathbb{R}^n$ sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$ ($j=1, \dots, l$) gegeben.

Ferner sei $m \in \mathbb{N}$, $D_{\underline{\xi}} \subset X$ und $D_{\underline{\varphi}} \subset \mathbb{R}^m$ seien offen und konvex.

b) Für $v, \mu \in \{n, l, n_1, \dots, n_l\}$ seien $\|\cdot\|_v$ Normen auf $\mathbb{R}^v$ und es gelte für $\zeta = (\zeta_j)_{j=1(1)l} \in X$: $\|\zeta\|_n = \max_{j=1(1)l} \|\zeta_j\|_{n_j}$, mit $[\cdot]_{\mu, v}$ sei dann die durch $\|\cdot\|_v, \|\cdot\|_\mu$ auf $\mathbb{R}^{\mu, v}$ induzierte Matrix-Norm bezeichnet.

c) $\underline{g} : X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\underline{\varphi}} \longrightarrow X$
 $(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \longmapsto \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})$

sei stetig differenzierbar in $\underline{\xi}$ auf $D_{\underline{\xi}}$ und stetig in $\underline{\psi}$ und $\underline{\varphi}$ auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $D_{\underline{\varphi}}$. Für beliebige $K_1 \subset \subset D_{\underline{\xi}}$, $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$, $K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}}$ sei

$$\lambda(K_1, K_2, K_3) := \max_{j=1(1)l} \sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ \underline{\psi} \in K_2 \\ \underline{\varphi} \in K_3}} \left\| \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \underline{g}_j(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \right\|_{n_j, n} < \infty$$

d) Für $\alpha, \omega, \omega_{\max} \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq \omega$ und $0 < \omega \leq \omega_{\max}$ sei $\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}$ ($j=1, \dots, l$) die gemäß Definition (1.1.2.3) erklärte

Entkopplungsfunktion für den AWR-Algorithmus.

e) $\underline{g}$ sei gemäß $\underline{x} = \prod_{j=1}^1 \underline{x}_j$ partitioniert zu

$$\underline{g} = (g_j)_{j=1(1)1} \quad \text{mit} \quad g_j : D_{\xi} \times \mathbb{R}^m \times D_{\varphi} \longrightarrow X_j$$

Behauptung:

$$\begin{array}{lll} \forall & : & \exists \\ K_1 \subset \subset D_{\underline{\xi}} & , \text{ konvex} & \underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\eta}} \leq K_1 \\ K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m & & \underline{\psi} \in K_2 \\ K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}} & & \underline{\varphi} \in K_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \| (g_j(\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}, \underline{\varphi}) - g_j(\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\eta}}), \underline{\psi}, \underline{\varphi}))_{j=1(1)1} \|_{n, \infty} \leq \\ & \leq \lambda(K_1, K_2, K_3) [\max \{ \frac{1}{\omega}, 1 \} \| \underline{\xi} - \underline{\tilde{\xi}} \|_n + \max \{ |1 - \frac{1}{\omega}|, 1 \} \| \underline{\eta} - \underline{\tilde{\eta}} \|_n] \end{aligned}$$

Beweis:

Seien $K_1 \subset \subset D_{\underline{\xi}}$, $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$, $K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}}$ und $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\eta}} \leq K_1$,
 $\underline{\psi} \in K_2$, $\underline{\varphi} \in K_3$. Für $\alpha, \omega, \omega_{\max} \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$

gilt dann wegen $|\frac{\alpha}{\omega}| \leq 1$ und $|1 - \frac{\alpha}{\omega}| \leq 1$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \| \delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) - \delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\eta}}) \|_n \\ & \leq \max \{ \frac{1}{\omega}, 1 \} \| \underline{\xi} - \underline{\tilde{\xi}} \|_n + \max \{ |1 - \frac{1}{\omega}|, 1 \} \| \underline{\eta} - \underline{\tilde{\eta}} \|_n \end{aligned}$$

Da $\underline{g} = (g_j)_{j=1(1)l}$ stetig differenzierbar in $\underline{\xi}$ auf $D_{\underline{\xi}}$ ist, gilt für $j = 1, \dots, l$:

$$2) \quad \sup_{\substack{\underline{\zeta} \in K_1 \\ \Psi \in K_2 \\ \varphi \in K_3}} \left\| \frac{\partial}{\partial \underline{\zeta}} g_j(\underline{\zeta}, \underline{\Psi}, \underline{\varphi}) \right\|_{n_j, n} < \infty$$

Mit 1) und 2) erhält man für $j = 1(1)l$:

$$3) \quad \left\| g_j(\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\Psi}, \underline{\varphi}) - g_j(\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\eta}}), \underline{\Psi}, \underline{\varphi}) \right\|_{n_j} \\ \leq \lambda_j(K_1, K_2, K_3) \left\{ \max \left\{ \frac{1}{\omega}, 1 \right\} \|\underline{\xi} - \underline{\tilde{\xi}}\|_n + \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{\omega} \right|, 1 \right\} \|\underline{\eta} - \underline{\tilde{\eta}}\|_n \right\}$$

Mit den Voraussetzungen b) c) und e) erhält man aus 3) schließlich die Behauptung. $\square$

Über das Konvergenzverhalten des AWR-Algorithmus bei der Lösung der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen gibt nun folgender Satz Auskunft:

(1.2.1.6) SATZ (erster Konvergenzsatz)

Voraussetzungen:

a) Sei $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X := \mathbb{R}^n$ sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$ ($j = 1, \dots, l$) gegeben.

Ferner sei $m \in \mathbb{N}$, $D_{\underline{\xi}} \subset X$ und $D_{\underline{\varphi}} \subset \mathbb{R}^m$ seien offen und konvex.

b) Für $v, \mu \in \{n, n_1, \dots, n_l, m\}$ seien $\|\cdot\|_v$ Normen auf $\mathbb{R}^v$ und es gelte für $\underline{\xi} = (\xi_j)_{j=1(1)l} \in X$: $\|\underline{\xi}\|_n \max_{j=1(1)l} \|\xi_j\|_{n_j}$;
mit $\|\cdot\|_{\mu, v}$ sei dann die durch $\|\cdot\|_\mu, \|\cdot\|_v$ auf $\mathbb{R}^{\mu, v}$ induzierte Matrix-Norm bezeichnet.

c) Seien $\beta > 0, \gamma > 0, T > 0$. Auf $C^1([0, T], X), C^0([0, T], X)$

$$\|\underline{x}\|_{C^1, \beta, \gamma} := \max_{t \in [0, T]} (e^{-\beta t} (\|\dot{\underline{x}}(t)\|_n + \gamma \|\underline{x}(t)\|_n)), \underline{x} \in C^1([0, T], X),$$

$$\|\underline{x}\|_{C^0, \beta} := \max_{t \in [0, T]} (e^{-\beta t} \|\underline{x}(t)\|_n)$$

Normen erklärt.

d) $\underline{g} : X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\underline{\varphi}} \longrightarrow X$

$$(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \longmapsto \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})$$

sei stetig differenzierbar in $\underline{\xi}$ auf $D_{\underline{\xi}}$ und stetig in $\underline{\psi}$ und $\underline{\varphi}$ auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $D_{\underline{\varphi}}$. $\underline{g}$ sei gemäß $X := \prod_{j=1}^l X_j$ partitioniert zu

$$\underline{g} = (g_j)_{j=1(1)l} \text{ mit } g_j : D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\underline{\varphi}} \rightarrow X_j.$$

Für beliebige $K_1 \subset\subset D_{\underline{\xi}}, K_2 \subset\subset \mathbb{R}^m, K_3 \subset\subset D_{\underline{\varphi}}$ sei

$$\lambda(K_1, K_2, K_3) := \max_{j=1(1)l} \sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ \underline{\psi} \in K_2 \\ \underline{\varphi} \in K_3}} \left\| \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g_j(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \right\|_{n_j, n} < \infty$$

e) $S := (S_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$

sei gemäß $X = \sum_{j=1}^l X_j$ in Teilmatrizen $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$

partitioniert. Ferner sei $S = L_S + D_S + U_S$, wobei

$$D_S := \begin{bmatrix} S_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{ll} \end{bmatrix}$$

$$L_S := \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ S_{21} & & & & \cdot \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot \\ S_{l1} & \cdots & S_{l,l-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_S := \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & & S_{1l} \\ \cdot & \ddots & & \\ \cdot & & S_{l-1,l} & \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Es gelte:

S ist diagonaldominant und invertierbar

$L_S + D_S$ ist streng diagonaldominant.

f) Sei $\underline{\varphi} : [0, \infty) \rightarrow D_{\underline{\varphi}} \subset \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$.

g) Sei $\underline{g} = (g_j)_{j=1(1)l} \in D_{\underline{g}}$ und $\underline{g}' = (g'_j)_{j=1(1)l} \in X$ mit

$$S \underline{g}' - \underline{g}(\underline{g}, \dot{\underline{\varphi}}(0), \underline{\varphi}(0)) = 0$$

h) Das dynamische Verhalten von MOS-Schaltungen sei beschrieben durch das AWP :

$$\dot{\underline{f}}(\underline{p}, \underline{p}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) := \underline{S} \cdot \dot{\underline{p}} - \underline{g}(\underline{p}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) = 0 \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \dot{\underline{p}}(0) = \underline{\sigma}', \quad \underline{p}(0) = \underline{\sigma}.$$

i) Auf das AWP aus h) werde der AWR-Algorithmus gemäß Definition (1.1.2.3) mit $0 \leq \alpha \leq \omega$ und $0 \leq \omega_0 \leq \omega \leq 1$ angewendet. Mit der Entkopplungsfunktion $\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}$, $j = 1, \dots, l$, gemäß (1.1.2.3) sei dabei

$$\underline{\tilde{g}}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) := (\underline{g}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}, \underline{\varphi}))_{j=1(1)l}$$

$$\text{für } \underline{\xi}, \underline{\eta} \in D_{\underline{\xi}}, \underline{\psi} \in \mathbb{R}^m, \underline{\varphi} < D_{\underline{\varphi}}$$

$$Q_S^{\alpha, \omega} := \frac{\alpha}{\omega} L_S + \frac{1}{\omega} D_S$$

$$R_S^{\alpha, \omega} := -(1 - \frac{\alpha}{\omega}) L_S + (\frac{1}{\omega} - 1) D_S - U_S$$

j) Die Folge $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C^1([0, T], X)$ der durch den AWR-Algorithmus erzeugten Näherungslösungen für das AWP h) sei gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$K_1 \stackrel{\exists}{\subset} D_{\underline{\xi}} : \forall_{k \in \mathbb{N}} : \forall_{\substack{t \in [0, T] \\ j=1, \dots, l \\ 0 \leq \alpha \leq \omega, \omega_0 \leq \omega \leq 1}} : \underline{p}^{(k)}(t), \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t) \in K_1$$

k) Für $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 \leq \omega \leq 1$, $K_1 \subset \subset D_{\xi}$, $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$, $K_3 \subset \subset D_{\eta}$
 sei

$$\delta(\alpha, \omega) := \llbracket (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} R_S^{\alpha, \omega} \rrbracket_{n, n}$$

$$\gamma_1(\alpha, \omega) := \max \left\{ \frac{1}{\omega}, 1 \right\} \llbracket (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \rrbracket_{\lambda(K_1, K_2, K_3)}$$

$$\gamma_2(\alpha, \omega) := \max \left\{ \frac{1}{\omega} - 1, 1 \right\} \llbracket (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \rrbracket_{\lambda(K_1, K_2, K_3)}$$

$$\gamma(\alpha, \omega) := \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\delta(\alpha, \omega)} \quad , \quad \text{falls } \delta(\alpha, \omega) \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa(\alpha, \omega, \beta) &:= \delta(\alpha, \omega) + \frac{\delta(\alpha, \omega) \gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \\ \tilde{\kappa}(\alpha, \omega, \beta) &:= \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \end{aligned} \right\} \text{ für } \beta > \gamma_1(\alpha, \omega)$$

Behauptungen:

a) Das AWP aus Voraussetzung h) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $\underline{p} \in C^1([0, T], X)$.

b) Das AWR-Verfahren zur Lösung des AWP's aus Voraussetzung h) hat die Form:

0-ter Schritt:

Wähle $\underline{p}^{(0)} \in C^1([0, T], X)$ beliebig

k-ter Schritt:

Löse nach $\underline{p}^{(k)}$ das AWP

$$Q_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k)} = R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)} + \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \dot{\underline{p}}^{(k)}(0) = \underline{g}^1, \quad \underline{p}^{(k)}(0) = \underline{g}.$$

Das im k-ten Relaxationsschritt zu lösende System von Anfangswertproblemen hat jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung $\underline{p}^{(k)} \in C^1([0, T], X)$.

c) Die Folge $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ der durch das AWR-Verfahren erzeugten Näherungslösungen für das in Voraussetzung h) gegebene AWP genügt der Abschätzung

$$\|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \kappa(\alpha, \omega, \beta) \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^1, \beta, \gamma},$$

$$\text{falls } \delta(\alpha, \omega) > 0$$

und der Abschätzung

$$\|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^0, \beta} < \tilde{\kappa}(\alpha, \omega, \beta) \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^0, \beta},$$

$$\text{falls } \delta(\alpha, \omega) = 0.$$

Ferner gilt:

$$\kappa(\alpha, \omega, \beta) < 1 \iff \delta(\alpha, \omega) < 1 \quad \text{und} \quad \beta > \frac{\gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)}{1 - \delta(\alpha, \omega)}$$

$$\tilde{\kappa}(\alpha, \omega, \beta) < 1 \iff \beta > \gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega).$$

d) Die Folge $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ aus Behauptung c) konvergiert gleichmäßig gegen $\underline{p}$ (vgl. Behauptung a)), falls gilt:

$$\delta(\alpha, \omega) < 1$$

Beweis:

zu Behauptung a) :

Nach Voraussetzung e) existiert S^{-1} .

Seien $K_1 \subset \subset D_{\underline{\xi}}$, $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$ und $K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}}$. Nach Voraussetzung d) und Lemma (1.2.1.3) gibt es dann $\underline{\xi}^* \in K_1$,

$\underline{\psi}^* \in K_2$, $\underline{\varphi}^* \in K_3$ so daß gilt:

$$\sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ \underline{\psi} \in K_2 \\ \underline{\varphi} \in K_3}} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \right]_{n,n} = \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g(\underline{\xi}^*, \underline{\psi}^*, \underline{\varphi}^*) \right]_{n,n}$$

$$= \max_{j=1(1)1} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g_j(\underline{\xi}^*, \underline{\psi}^*, \underline{\varphi}^*) \right]_{n_j, n}$$

$$\leq \max_{j=1(1)1} \sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ \underline{\psi} \in K_2 \\ \underline{\varphi} \in K_3}} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g_j(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \right]_{n_j, n}$$

$$= \lambda(K_1, K_2, K_3)$$

Für $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in K_1$, $\underline{\psi} \in K_2$, $\underline{\varphi} \in K_3$ gilt damit

$$\| S^{-1} \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) - S^{-1} \underline{g}(\underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \|_n$$

$$\leq \| S^{-1} \|_{n,n} \cdot \lambda(K_1, K_2, K_3) \| \underline{\xi} - \underline{\eta} \|_n .$$

$S^{-1} \underline{g}$ ist also lokal Lipschitz-stetig in $\underline{\xi}$. Das AWP

$$\dot{\underline{p}} = S^{-1} \underline{g}(\underline{p}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \underline{p}(0) = \underline{g}$$

hat dann nach dem Satz von Picard-Lindelöf [vgl. (20), p. 20, Theorem 3.2] eine eindeutig bestimmte Lösung $\underline{p} \in C^1([0, 1], X)$, also mit Voraussetzung g) auch das AWP h).

□

zu Behauptung b):

Sei $0 \leq \alpha \leq \omega$ und $0 < \omega \leq 1$. Aus den Voraussetzungen h) i) und Definition (1.1.2.3) erhält man für den k-ten Relaxations-schritt ($k = 1, 2, \dots$) folgende Anfangswertprobleme für $j = 1, \dots, l$:

$$(S_{j1}, \dots, S_{jl})^{\delta^{\alpha, \omega, j}} (\dot{\underline{p}}^{(k)}, \dot{\underline{p}}^{(k-1)}) - \underline{g}_j(\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}), \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) = 0$$

$$\text{auf } [0, T] \text{ mit } \dot{\underline{p}}_j(0) = \underline{g}'_j, \quad \underline{p}_j(0) = \underline{g}.$$

Nach Definition der Entkopplungsfunktion $\delta^{\alpha, \omega, j}$ (vgl. (1.1.2.3)) sind diese AWP's äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\omega} \sum_{i=1}^{j-1} s_{ji} \dot{p}_i^{(k)} + \frac{1}{\omega} s_{jj} \dot{p}_j^{(k)} \\ & + \left(1 - \frac{\alpha}{\omega}\right) \sum_{i=1}^{j-1} s_{ji} \dot{p}_i^{(k-1)} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) s_{jj} \dot{p}_j^{(k-1)} + \sum_{i=j+1}^1 s_{ji} \dot{p}_i^{(k-1)} \\ & - \underline{g}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi})) = 0 \quad \text{auf } [0, T] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \dot{p}_j^{(k)}(0) = \underline{g}'_j, \quad \underline{p}_j^{(k)}(0) = \underline{g}_j.$$

Mit den Bezeichnungen aus Voraussetzung 1) erhält man diese AWP's in der kompakten Form für $k = 1, 2, \dots$:

$$1) \quad Q_S^{\alpha, \omega} \underline{\dot{p}}^{(k)} = R_S^{\alpha, \omega} \underline{\dot{p}}^{(k-1)} + \underline{\tilde{g}}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \underline{\dot{p}}^{(k)}(0) = \underline{g}', \quad \underline{p}^{(k)}(0) = \underline{g}.$$

Da nach Voraussetzung e) $(I_S + D_S)$ streng diagonaldominant ist, ist wegen $0 \leq \alpha \leq 1$ auch $Q_S^{\alpha, \omega} = \frac{\alpha}{\omega} I_S + \frac{1}{\omega} D_S = \frac{1}{\omega} (\alpha L_S + D_S)$ streng diagonaldominant und somit invertierbar.

Sei nun $K_1 \subset \subset D_{\xi}$, $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$, $K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}}$, dann gilt für

$\underline{\xi}, \underline{\tilde{\xi}}, \underline{\eta} \in K_1$, $\underline{\eta}' \in X$, $\underline{\psi} \in K_2$, $\underline{\varphi} \in K_3$ nach Lemma (1.2.1.4):

$$\begin{aligned} & \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} \underline{\eta}' + \underline{\tilde{g}}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})] - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} \underline{\eta}' + \underline{\tilde{g}}(\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})] \|_n \\ & \leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \|_{n, n} \| \underline{\tilde{g}}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) - \underline{\tilde{g}}(\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \|_n \end{aligned}$$

$$\leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \| \cdot \lambda(K_1, K_2, K_3) \cdot \max \left\{ \frac{1}{\omega}, 1 \right\} \cdot \| \underline{\xi} - \tilde{\underline{\xi}} \|_n$$

Damit ist $(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} \eta' + \tilde{g}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})]$ lokal Lipschitz-stetig in $\underline{\xi}$ und man erhält wie im Beweis zu Behauptung a) die eindeutige Lösbarkeit des AWP's 1). $\square$

zu Behauptung c) :

Sei $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C^1([0, T], X)$ und $K_1 \subset \subset D_{\xi}$ gemäß Voraussetzung j) gegeben. Ferner gibt es nach Voraussetzung f) ein $K_2 \subset \subset \mathbb{R}^m$ und ein $K_3 \subset \subset D_{\underline{\varphi}}$ so daß für alle $t \in [0, T]$ gilt:
 $\underline{\varphi}(t) \in K_2$, $\underline{\varphi}(t) \in K_3$. Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $0 \leq \alpha \leq \omega$,
 $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$ und $t \in [0, T]$ gilt dann nach Lemma (1.2.1.4) und den Voraussetzungen d) i) k):

$$\begin{aligned} & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \|_n \leq \\ & \leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) + \tilde{g}(\underline{p}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \\ & - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) + \tilde{g}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{p}^{(k-2)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \|_n \\ & \leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \cdot R_S^{\alpha, \omega} \|_{n, n} \cdot \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)} - \dot{\underline{p}}^{(k-2)} \|_n \\ & + \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \| \cdot \lambda(K_1, K_2, K_3) \cdot \\ & \cdot \left[\max \left\{ \frac{1}{\omega}, 1 \right\} \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n + \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{\omega} \right|, 1 \right\} \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|_n \right] \end{aligned}$$

$$1) \quad = \delta(\alpha, \omega) \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \|_n + \gamma_2(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|_n \\ + \gamma_1(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n$$

Setze $\Psi(t, \alpha, \omega) := \delta(\alpha, \omega) \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \|_n +$
 $+ \gamma_2(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|_n$ für $t \in [0, T]$, dann
 folgt nach Lemma (1.2.1.2) :

$$2) \quad \forall_{t \in [0, T]} : \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n \leq c(t, \alpha, \omega) ,$$

wobei $c(\cdot, \alpha, \omega) \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ für $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega \leq 1$

Lösung des AWP's

$$3) \quad \dot{c} = \Psi(\cdot, \alpha, \omega) + \gamma_1(\alpha, \omega) \cdot c \quad \text{auf } [0, T] \\ \text{mit } c(0) = 0$$

ist. Es gilt:

$$4) \quad c(t, \alpha, \omega) = e^{\gamma_1(\alpha, \omega)t} \int_0^t \Psi(\tau, \alpha, \omega) e^{-\gamma_1(\alpha, \omega)\tau} d\tau \quad \text{für } t \in [0, T]$$

Für die weiteren Abschätzungen wird unterschieden nach

$$\delta(\alpha, \omega) > 0 \quad \text{und} \quad \delta(\alpha, \omega) = 0 .$$

1. Fall : $\delta(\alpha, \omega) > 0$

Sei $\gamma := \gamma(\alpha, \omega) := \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\delta(\alpha, \omega)}$ und $\beta > \gamma_1(\alpha, \omega)$.

Für alle $t \in [0, T]$ gilt dann mit Voraussetzung c) :

$$5) \quad e^{-\beta t} \psi(t, \alpha, \omega) = \delta(\alpha, \omega) e^{-\beta t} (\| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|_n + \gamma(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|_n)$$

$$\leq \delta(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

Aus 2), 4), 5) erhält man:

$$\| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n \leq e^{\gamma_1(\alpha, \omega)t} \int_0^t e^{-\beta \tau} \psi(\tau, \alpha, \omega) e^{(\beta - \gamma_1(\alpha, \omega))\tau} d\tau$$

$$\leq e^{\gamma_1(\alpha, \omega)t} \delta(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \int_0^t e^{(\beta - \gamma_1(\alpha, \omega))\tau} d\tau$$

$$6) \quad = \frac{\delta(\alpha, \omega) e^{\gamma_1(\alpha, \omega)t}}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} (e^{(\beta - \gamma_1(\alpha, \omega))t} - 1) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

Aus 1), 5), 6) erhält man:

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \|_n + \gamma \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n e^{-\beta t} \\
 & \leq e^{-\beta t} \Psi(t, \alpha, \omega) + (\gamma(\alpha, \omega) + \gamma_1(\alpha, \omega)) e^{-\beta t} \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|_n \\
 & \leq \delta(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma} + \\
 & \quad + (\gamma(\alpha, \omega) + \gamma_1(\alpha, \omega)) \frac{\delta(\alpha, \omega) e^{(\gamma_1(\alpha, \omega) - \beta)t}}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} (e^{(\beta - \gamma_1(\alpha, \omega))t} - 1) \cdot \\
 & \quad \cdot \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \\
 & \leq \left[\delta(\alpha, \omega) + \frac{\delta(\alpha, \omega) (\gamma(\alpha, \omega) + \gamma_1(\alpha, \omega))}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \right] \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \\
 & = \left[\delta(\alpha, \omega) + \frac{\gamma_2(\alpha, \omega) + \delta(\alpha, \omega) \gamma_1(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \right] \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}
 \end{aligned}$$

Durch Maximumbildung auf der linken Seite erhält man aus 7) schließlich

$$8) \quad \| \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \kappa(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

wobei

$$\kappa(\alpha, \omega, \beta) := \delta(\alpha, \omega) + \frac{\gamma_2(\alpha, \omega) + \delta(\alpha, \omega) \gamma_1(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)}$$

Es gilt ferner:

$$9) \quad \kappa(\alpha, \omega, \beta) < 1 \iff \delta(\alpha, \omega) < 1 \quad \text{und} \quad \beta > \frac{\gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)}{1 - \delta(\alpha, \omega)} > \gamma_1(\alpha, \omega)$$

2. Fall : $\delta(\alpha, \omega) = 0$

Für alle $t \in [0, T]$ gilt dann nach Voraussetzung c) mit $\beta > \gamma_1(\alpha, \omega)$:

$$\begin{aligned} 10) \quad e^{-\beta t} \Psi(t, \alpha, \omega) &= \gamma_2(\alpha, \omega) e^{-\beta t} \|\underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t)\|_n \\ &\leq \gamma_2(\alpha, \omega) \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^0, \beta} \end{aligned}$$

Aus 2), 4), 10) erhält man analog zu 6) :

$$\begin{aligned} \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|_n &\leq \frac{\gamma_2(\alpha, \omega) e^{\gamma_1(\alpha, \omega) t}}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \cdot (e^{(\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)) t} - 1) \cdot \\ &\cdot \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^0, \beta} \end{aligned}$$

Somit ist für $t \in [0, T]$:

$$11) \quad e^{-\beta t} \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|_n \leq \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)} \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^0, \beta}$$

Durch Maximumbildung auf der Linken Seite erhält man aus 11) schließlich:

$$12) \quad \| \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \|_{C^0, \beta} \leq \tilde{\kappa}(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^0, \beta}$$

wobei

$$\tilde{\kappa}(\alpha, \omega, \beta) := \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\beta - \gamma_1(\alpha, \omega)}$$

Hierbei gilt:

$$13) \quad \tilde{\kappa}(\alpha, \omega, \beta) < 1 \iff \beta > \gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega) .$$

□

zu Behauptung d) :

Sei $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$ und $0 < \delta(\alpha, \omega) < 1$

Es werde der Operator

$$P : (C^1([0, T], X), \|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}) \longrightarrow (C^1([0, T], X), \|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma})$$

$$\underline{y} \longmapsto \underline{x} := P(\underline{y})$$

für $\beta > 0$, $\gamma > 0$ betrachtet, wobei $\underline{x} = P(\underline{y})$ als Lösung des AWP's

$$Q_s^{\alpha, \omega} \dot{\underline{x}} = R_s^{\alpha, \omega} \underline{y} + \tilde{q}^{\alpha, \omega}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}) \quad \text{auf } [0, T] ,$$

$$\dot{\underline{x}}(0) = \underline{\sigma}^1 , \quad \underline{x}(0) = \underline{\sigma} ,$$

definiert sei.

Nach Behauptung b) gilt dann für $k \in \mathbb{N}$ und $\underline{p}^{(0)} \in C^1([0, T], X)$ beliebig:

$$\underline{p}^{(k)} = \underline{p}(\underline{p}^{(k-1)}) .$$

Nach Definition (1.1.2.3) erhält man für die Lösung $\underline{p}$ des AWP h):

$$1) \quad \underline{p} = \underline{p}(\underline{p}) .$$

Nach Behauptung c) ist der Operator $\underline{p}$ kontrahierend auf $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$, falls $\delta(\alpha, \omega) < 1$ gilt, und man erhält wie im Beweis zum Banach'schen Fixpunktsatz [vgl. etwa (20), p.5]:

$$\exists \quad : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\underline{p}} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} = 0$$

Da $\underline{p}$ ein stetiger Operator auf $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} 2) \quad 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}(\underline{p}^{(k-1)})\|_{C^1, \beta, \gamma} \\ &= \|\lim_{k \rightarrow \infty} [\underline{p}^{(k)} - \underline{p}(\underline{p}^{(k-1)})]\|_{C^1, \beta, \gamma} \\ &= \tilde{\underline{p}} - \underline{p}(\tilde{\underline{p}}) \end{aligned}$$

Aus 1), 2) und Behauptung a) erhält man schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{p} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} = 0 .$$

Da für $\underline{z} \in C^1([0, T], X)$ nach Voraussetzung c) gilt:

$$\|\underline{z}\|_{C^1, \beta, \gamma} \geq (\gamma e^{-\beta T}) \max_{t \in [0, T]} \|\underline{z}(t)\|_n,$$

erhält man auch die gleichmäßige Konvergenz von $\underline{p}^{(k)}$ gegen $\underline{p}$.

Für $\delta(\alpha, \omega) = 0$ erhält man Behauptung d) in analoger Weise. □

(1.2.1.7) BEMERKUNGEN zu Satz (1.2.1.6) :

a) Da i.a. nur die lokale Lipschitz-Stetigkeit von $\underline{g}$ [vgl. Voraussetzung d)] zur Verfügung steht, ist die gleichmäßige Beschränktheit von $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ zu fordern, um geeignete lokale Lipschitz-Konstanten $\lambda(K_1, K_2, K_3)$ von $\underline{g}$ für die Abschätzungen im Beweis zu Behauptung c) benutzen zu können. Falls für $\underline{g}$ eine globale Lipschitzkonstante angegeben werden kann, kann auf die Voraussetzung j) verzichtet werden.

b) Die entscheidende Voraussetzung für die Konstruktion eines Kontraktionsfaktors $\kappa(\alpha, \omega, \beta)$ ist durch

$$0 \leq \delta(\alpha, \omega) := \|(Q_S^{(\alpha, \omega)})^{-1} R_S^{\alpha, \omega}\|_{n, n} < 1$$

gegeben. Bei $U_S = 0 \in \mathbb{R}^{n, n}$, d.h. $S = (S_{ij})_{i, j=1(1)1} \in \mathbb{R}^{n, n}$ mit $S_{ij} = 0 \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$ für $j > i$, ist dies mit der Parameterwahl $\alpha = \omega = 1$ stets erfüllt, da dann $R_S^{\alpha, \omega} = 0$ ist und somit $\delta(\alpha, \omega) = 0$ gilt.

c) Nach Voraussetzung i) wird das AWK-Verfahren mit Relaxationsparametern α, ω aus den Bereichen

$$0 \leq \alpha \leq \omega, \quad 0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$$

angewendet. Im Beweis zu Behauptung b) wird jedoch nur $0 \leq \alpha \leq 1$ benötigt, um zu garantieren, daß $Q_S^{\alpha, \omega}$ streng diagonaldominant ist. Die obige Einschränkung der für α, ω zulässigen Bereiche wird durch die folgende Überlegung begründet:

Nach Voraussetzung a) ist $D_{\underline{\xi}} \subset X$ offen und konvex.

Für $j = 1, \dots, l$ sei die Entkopplungsfunktion $\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}$ gemäß (1.1.2.3) erklärt; es sei ferner

$$\underline{\delta} := (\underline{\delta}_i)_{i=1(1)l} := \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta})$$

$$\text{mit } \underline{\xi} := (\underline{\xi}_i)_{i=1(1)l} := \underline{p}^{(k)}(t) = (\underline{p}_i^{(k)}(t))_{i=1(1)l},$$

$$\text{und } \underline{\eta} := (\underline{\eta}_i)_{i=1(1)l} := \underline{p}^{(k-1)}(t) = (\underline{p}_i^{(k-1)}(t))_{i=1(1)l},$$

$$t \in [0, T].$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\underline{\eta} \in D_{\underline{\xi}}, \quad \underline{\xi}_i \in D_{\underline{\xi}} \cap X_i \quad \text{für } i = 1, \dots, j-1 \quad \text{und}$$

$$\underline{\delta}_j \in D_{\underline{\xi}} \cap X_j$$

gilt, ist im k -ten Relaxationsschritt bei der Lösung des j -ten Teilsystems $\underline{p}_j^{(k)}$ derart zu bestimmen, daß zu jedem Zeitpunkt

$t \in [0, T]$ für $\xi_j := p_j^{(k)}(t)$ gilt:

$$(*) \quad \xi_j \in D_{\xi} \cap X_j \quad .$$

Ferner muß nach der Definition des AWR-Algorithmus gelten:

$$(**) \quad \underline{\delta} \in D_{\xi}$$

Wegen

$$\underline{\delta}_i = \frac{\alpha}{\omega} \xi_i + (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \eta_i \quad \text{für } i = 1, \dots, j-1 ,$$

$$\underline{\delta}_i = \eta_i \quad \text{für } i = j+1, \dots, l ,$$

$$\underline{\delta}_j = \frac{1}{\omega} \xi_j + (1 - \frac{1}{\omega}) \eta_j \quad \text{d.h.}$$

$$\xi_j = \omega \underline{\delta}_j + (1-\omega) \eta_j$$

sind (*) und (**) erfüllt, wenn gilt:

$$\omega \neq 0 \quad , \quad 0 \leq \frac{\alpha}{\omega} \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad . \quad \square$$

d) Der Abschätzung in Behauptung c) entnimmt man die folgende Fehlerabschätzung

$$\| p^{(k)} - p \|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \frac{(\kappa(\alpha, \omega, \beta))^k}{1 - \kappa(\alpha, \omega, \beta)} \| p^{(1)} - p^{(0)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \quad .$$

Wegen $\beta > 0$ und

$$\begin{aligned} \|\underline{p}^{(1)} - \underline{p}^{(0)}\|_{C^1, \beta, \gamma} &\geq e^{-\beta t} (\|\dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t)\| + \\ &+ \gamma \|\underline{p}^{(1)}(t) - \underline{p}^{(0)}(t)\|) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ wird bei $\|\underline{p}^{(1)} - \underline{p}^{(0)}\|_{C^1, \beta, \gamma} < \epsilon$ (mit $\epsilon > 0$ beliebig) am rechten Rand des Zeitintervalls $[0, T]$

$$\|\dot{\underline{p}}^{(1)}(T) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(T)\|_n + \gamma \|\underline{p}^{(1)}(T) - \underline{p}^{(0)}(T)\|_n \leq \epsilon e^{\beta T}$$

als Fehlerabschätzung zugelassen, d.h. für große Zeitintervalle $[0, T]$ kann nur langsame Konvergenz erwartet werden. Wie die anschließende Folgerung zeigt, wächst die Anzahl der für das Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit hinreichenden Relaxations-schritte proportional mit der Vergrößerung des zugrundeliegenden Zeitintervalls.

(1.2.1.8) FOLGERUNG :

Voraussetzung:

a) Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz

(1.2.1.6)

b) Es sei $0 < \delta(\alpha, \omega) < 1$, und $\beta > \frac{\gamma_1(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)}{1 - \delta(\alpha, \omega)}$

c) Für $T > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$c(T, k) := e^{(\beta + \gamma(\alpha, \omega))T} \frac{(\kappa(\alpha, \omega, \beta))^k}{1 - \kappa(\alpha, \omega, \beta)}$$

d) Seien $0 < T_1 < T_2 < \infty$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

e) $\|\cdot\|_\infty$ bezeichne die Maximum-Norm auf $X = \mathbb{R}^n$.

Behauptungen:

$$a) \quad \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{p}}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k)}(t)\|_\infty + \gamma(\alpha, \omega) \|\underline{p}(t) - \underline{p}^{(k)}(t)\|_\infty)$$

$$\leq c(T, k) \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t)\|_\infty$$

$$b) \quad c(T_1, k_1) \geq c(T_2, k_2) \iff k_2 - k_1 \geq \frac{\beta + \gamma(\alpha, \omega)}{-\ln \kappa(\alpha, \omega, \beta)} (T_2 - T_1)$$

Beweis:

zu Behauptung a) :

Nach Voraussetzung b) und Satz (1.2.1.6), Behauptung c), ist

$\kappa := \kappa(\alpha, \omega, \beta) < 1$ und man erhält für $k, r \in \mathbb{N}$:

$$\|\underline{p}^{(k+r)} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \sum_{i=1}^r \|\underline{p}^{(k+i)} - \underline{p}^{(k+i-1)}\|_{C^1, \beta, \gamma}$$

$$\leq (\kappa^{r-1} + \dots + \kappa^1 + 1) \kappa^k \|\underline{p}^{(1)} - \underline{p}^{(0)}\|_{C^1, \beta, \gamma}$$

$$\leq \frac{\kappa^k}{1-\kappa} \|\underline{p}^{(1)} - \underline{p}^{(0)}\|_{C^1, \beta, \gamma}$$

Wegen der Stetigkeit der Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ auf $C^1([0, T], X)$

und wegen Satz (1.2.1.6), Behauptung d), erhält man für die Lösung $\underline{p} \in C^1([0, T], X)$ des AWP aus Satz (1.2.1.6), Voraussetzung h) :

$$\begin{aligned} 1) \quad \|\underline{p} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} &= \|\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{p}^{(k+r)} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\underline{p}^{(k+r)} - \underline{p}^{(k)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \\ &\leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \|\underline{p}^{(1)} - \underline{p}^{(0)}\|_{C^1, \beta, \gamma} . \end{aligned}$$

Ferner gilt mit $\gamma := \gamma(\alpha, \omega)$ und $\underline{z} \in C^1([0, T], X)$:

$$\begin{aligned} 2) \quad \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{z}}(t)\|_{\infty} + \gamma \|\underline{z}(t)\|_{\infty}) \\ \leq e^{\beta T} \max_{t \in [0, T]} (e^{-\beta t} (\|\dot{\underline{z}}(t)\|_{\infty} + \gamma \|\underline{z}(t)\|_{\infty})) \\ = e^{\beta T} \|\underline{z}\|_{C^1, \beta, \gamma} . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 3) \quad \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t)\| + \gamma \|\underline{p}^{(1)}(t) - \underline{p}^{(0)}(t)\|_{\infty}) \\ \leq \max_{t \in [0, T]} (\|\dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t)\|_{\infty} + \gamma \|\int_0^t (\dot{\underline{p}}^{(1)}(s) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(s)) ds\|_{\infty}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \max_{t \in [0, T]} (\| \dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t) \|_{\infty} + \gamma T \| \dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t) \|_{\infty}) \\
 &= (1 + \gamma T) \max_{t \in [0, T]} \| \dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t) \|_{\infty} \\
 &\leq e^{\gamma T} \max_{t \in [0, T]} \| \dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t) \|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Aus 1), 2), 3) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 &\max_{t \in [0, T]} (\| \dot{\underline{p}}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) \|_{\infty} + \gamma \| \underline{p}(t) - \underline{p}^{(k)}(t) \|_{\infty}) \\
 &\leq e^{(\beta + \gamma)T} \frac{\kappa^k}{1 - \kappa} \max_{t \in [0, T]} \| \dot{\underline{p}}^{(1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(0)}(t) \|_{\infty} . \quad \square
 \end{aligned}$$

zu Behauptung b):

Sei $0 < T_1 < T_2 < \infty$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
 c(T_2, k_2) &\leq c(T_1, k_1) \iff \\
 e^{(\beta + \gamma)T_2} \frac{\kappa^{k_2}}{1 - \kappa} &\leq e^{(\beta + \gamma)T_1} \frac{\kappa^{k_1}}{1 - \kappa} \iff \\
 (\beta + \gamma)T_2 + k_2 \ln \kappa &\leq (\beta + \gamma)T_1 + k_1 \ln \kappa \iff
 \end{aligned}$$

$$k_2 - k_1 \geq \frac{\beta + \kappa}{-\ln \kappa} (T_2 - T_1) \quad ,$$

wobei $\ln \kappa < 0$ wegen $\kappa < 1$ gilt.

□

1.2.2 Logarithmische Matrixnormen und Dahlquist-Konstanten

Im Konvergenzbeweis für den AWR-Algorithmus wird durch Abschätzungen mit Hilfe von Matrixnormen, die von einer Vektornorm induziert sind, und durch Verwendung einer (i.a. nur lokalen) Lipschitzkonstante für die nichtlineare rechte Seite des gegebenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Differentialungleichung der Form

$$\|\dot{\underline{z}}(t)\| \leq \Psi(t) + \gamma \|\underline{z}(t)\| \quad , \quad t \in [0, T] \quad ,$$

hergeleitet, wobei $\gamma > 0$ und $\Psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$ gilt [vgl. hierzu 1) im Beweis zu Satz (1.2.1.6), Behauptung c)].

Um die Qualität von Abschätzungen, die auf derartigen Differentialungleichungen beruhen, beurteilen zu können, wird zunächst folgendes einfachere, lineare Testproblem betrachtet:

(1.2.2.1) TESTPROBLEM :

Voraussetzungen:

Sei $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n, n}$ stetig und $\underline{z}_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$t \mapsto A(t)$$

Problem:

Gesucht ist die (eindeutig bestimmte) Lösung $\underline{z} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{\underline{z}} = A(t) \cdot \underline{z} \quad \text{auf } [0, \infty) \quad \text{mit} \quad \underline{z}(0) = \underline{z}_0.$$

Die Anwendung von Normen auf beiden Seiten des AWP's aus (1.2.2.1) ergibt die Differentialungleichung

$$\|\dot{\underline{z}}(t)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|\underline{z}(t)\| \quad \text{für } t \in [0, \infty)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\|\underline{z}(0)\| = \|\underline{z}_0\|.$$

Falls $\exists \gamma \geq 0 : \forall t \in [0, \infty) : \|A(t)\| \leq \gamma$ gilt, folgt daraus:

$$\|\dot{\underline{z}}(t)\| \leq c(t), \quad \text{für alle } t \in [0, \infty),$$

wobei $c \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ Lösung des AWP

$$\dot{c} = \gamma \cdot c \quad \text{auf } [0, \infty) \quad \text{mit} \quad c(0) = \|\underline{z}_0\|$$

ist, d.h.

$$c(t) = \|\underline{z}_0\| e^{\gamma t} \quad \text{für } t \in [0, \infty).$$

Falls $A(t) \neq 0$ gilt (d.h. $\gamma > 0$), hat $c(t)$ stets exponentielles Wachstum, wohingegen für die Lösung $\underline{z}$ des AWP aus (1.2.2.1) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{z}(t)\| = 0, \quad ,$$

falls

$$\begin{aligned} \exists \quad \gamma_0 < 0 \quad : \quad \forall \quad \lambda(t) \in \mathbb{C} \quad : \quad \operatorname{Re} \lambda(t) \leq \gamma_0 \\ \det(A(t) - \lambda(t)I) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Um dieses Verhalten der Lösung auch näherungsweise aus der Abschätzung von $\|\underline{z}(t)\|$ durch die Funktion $c(t)$ ableiten zu können, sind demnach Differentialgleichungen folgender Form erwünscht:

$$\frac{d^+}{dt} \|\underline{z}(t)\| \leq \mu[A(t)] \|\underline{z}(t)\| \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \mu[A(t)] < 0 \quad \text{gemäß } \operatorname{Re} \lambda(t) < 0.$$

Dazu wurden 1958 unabhängig voneinander durch Dahlquist (10) und Lozinskij (31) die logarithmischen Matrixnormen als Hilfsmittel für die Untersuchung des Wachstumsverhaltens von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme und des Fehlers von zugehörigen, durch Diskretisierungsmethoden gewonnenen Näherungslösungen eingeführt. Neuere Überlegungen hierzu wurden in den

letzten Jahren insbesondere von C.A. Desoer, H. Haneda (12) von T. STRÖM (52) und von G. Dahlquist (11) veröffentlicht. Eine Verallgemeinerung dieser Theorie für nichtlineare Operatoren wurde von G. Söderlind (49), (50) vorgestellt.

Im Folgenden wird hierzu eine knappe Darstellung der in dieser Arbeit benötigten Begriffe und Zusammenhänge in Anlehnung an G. Dahlquist und G. Söderlind geliefert.

(1.2.2.2) DEFINITION : [siehe (10), p. 11]

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$ und sei mit $\|\cdot\|$ die von $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{r,r}$ induzierte Matrixnorm, d.h.

$$\|A\| := \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^r \\ \|\xi\| = 1}} \|A \cdot \xi\|.$$

Dann heißt

$$\mu_{\|\cdot\|}[A] := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\|I + hA\| - 1)$$

"logarithmische Norm" ¹⁾ von A.

(1.2.2.3) BEISPIELE : [siehe (10), p. 11]

Sei $A := (a_{ij})_{i,j=1(1)r} \in \mathbb{R}^{r,r}$, $\xi := (\xi_j)_{j=1(1)r} \in \mathbb{R}^r$, dann gilt:

1) falls klar ist, welche Norm $\|\cdot\|$ zugrunde liegt, wird im Folgenden auch kurz $\mu[A]$ geschrieben.

$$a) \quad \|\underline{\xi}\| := \|\underline{\xi}\|_1 := \sum_{j=1}^r |\xi_j| \rightarrow$$

$$\|A\|_1 = \max_{i=1, \dots, r} \sum_{j=1}^r |a_{ij}| \quad \text{und}$$

$$\mu_{\|\cdot\|_1}[A] = \max_{i=1, \dots, r} (a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$$

$$b) \quad \|\underline{\xi}\| := \|\underline{\xi}\|_\infty := \max_{j=1, \dots, r} |\xi_j| \rightarrow$$

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1, \dots, r} \sum_{i=1}^r |a_{ij}| \quad \text{und}$$

$$\mu_{\|\cdot\|_\infty}[A] = \max_{j=1, \dots, r} (a_{jj} + \sum_{i, i \neq j} |a_{ij}|)$$

$$c) \quad \|\underline{\xi}\| := \|\underline{\xi}\|_2 := \sqrt{\underline{\xi}^T \cdot \underline{\xi}} \rightarrow$$

$$\|A\|_2 = (\max \{ |\lambda| : \det(A^T A - \lambda I) = 0 \})^{1/2} \quad \text{und}$$

$$\mu_{\|\cdot\|_2}[A] = \max \{ \lambda \in \mathbb{R} : \det(\frac{A+A^T}{2} - \lambda I) = 0 \}$$

Die logarithmische Norm $\mu_{\|\cdot\|}[A]$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist also die Gateaux-Ableitung der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ in Richtung $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ bezüglich der durch $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ erzeugten Matrixnorm $\|\cdot\|$. Wichtige Eigenschaften der logarithmischen Norm sind zusammengefaßt in

(1.2.2.4) LEMMA :

Voraussetzungen:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{r, r}$, $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^r$, ferner sei

$$\gamma \in \mathbb{R}, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^r,$$

$$\alpha(A) := \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \det(A - \lambda) = 0 \}$$

Behauptungen:

$$a) \quad \mu_{\|\cdot\|}[A] = \min \{ \kappa \in \mathbb{R} : \|e^{tA}\| \leq e^{\kappa t}, \quad t \geq 0 \}$$

$$b) \quad |\mu_{\|\cdot\|}[A]| \leq \|A\|$$

$$c) \quad \mu_{\|\cdot\|}[\gamma A] = |\gamma| \mu_{\|\cdot\|}[(\operatorname{sgn} \gamma)A]$$

$$d) \quad \mu_{\|\cdot\|}[A+B] \leq \mu_{\|\cdot\|}[A] + \mu_{\|\cdot\|}[B]$$

$$e) \quad \alpha(A) \leq \mu_{\|\cdot\|}(A)$$

$$f) \quad \|A \underline{\xi}\| \geq \mu_{\|\cdot\|}^*[A] \cdot \|\underline{\xi}\| \quad \text{mit}$$

$$\mu_{\|\cdot\|}^*[A] := \max \{ -\mu_{\|\cdot\|}[-A], -\mu_{\|\cdot\|}[A] \}$$

$$g) \quad \inf_{\|\underline{\xi}\|=1} \|A \underline{\xi}\| \geq \mu_{\|\cdot\|}^*[A]$$

$$[\text{Bemerkung: } \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \inf_{\|\underline{\xi}\|=1} \|A \underline{\xi}\|, \text{ falls } \det(A) \neq 0]$$

$$h) \quad \mu_{\|\cdot\|}[A + \gamma I] = \mu_{\|\cdot\|}[A] + \gamma$$

$$i) \quad \mu_{\|\cdot\|}[I] = 1, \quad \mu_{\|\cdot\|}[-I] = -1$$

(1.2.2.5) DEFINITION : [vql. (11)] :

Seien $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X := \mathbb{R}^n$

sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, \dots, l$,
gegeben, ferner sei $X_0 := \mathbb{R}^1$.

Auf den Räumen X_j , $j = 0, 1, \dots, l$ seien monotone Normen

$\|\cdot\|_j$, $j = 0, 1, \dots, l$ definiert

a) Für $\underline{\xi} := (\xi_j)_{j=0,1,\dots,l} \in X$ mit $\xi_j \in X_j$ sei:

$$\hat{\xi}_j := \|\xi_j\|_j \quad \text{für } j = 1(1)l,$$

$$\hat{\xi} := (\hat{\xi}_j)_{j=1(1)l}.$$

b) Mit a) sei auf X eine (monotone) Norm $\|\cdot\|$ gegeben durch

$$\|\underline{\xi}\| := \|\hat{\xi}\|_0 = \|(\|\xi_1\|_1, \dots, \|\xi_l\|_l)^T\|_0.$$

c) Seien

$$\|A_{ij}\|_{1,j} := \sup_{\xi_j \in X_j \setminus \{0\}} \frac{\|A_{ij} \cdot \xi_j\|_1}{\|\xi_j\|_j} \quad \text{für } A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$$

$$\|A\|_0 := \sup_{\xi_0 \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A} \cdot \xi_0\|_0}{\|\xi_0\|_0} \quad \text{für } \tilde{A} \in \mathbb{R}^{1,l}$$

$$\|A\| := \sup_{\xi \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A \cdot \xi\|}{\|\xi\|} \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

die durch $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_l, \|\cdot\|_0, \|\cdot\|$ induzierten Matrixnormen.

d) Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$ und $\det(A_{ii}) \neq 0$ für $i = 1(1)l$. Dann heißt

$$\hat{A} := (\hat{a}_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{1,1} \quad \text{"Majorante von A"}$$

$$: \Leftrightarrow \quad \forall_{i,j \in \{1, \dots, l\}} : \hat{a}_{ij} \geq \|A_{ij}\|_{ij},$$

und

$$\check{A} := (\check{a}_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{1,1} \quad \text{"Minorante von A"}$$

$$: \Leftrightarrow \quad \forall_{\substack{i,j \in \{1, \dots, l\} \\ i \neq j}} : \check{a}_{ij} \leq -\|A_{ij}\|_{ij}$$

$$\text{und } \check{a}_{ii} \leq \frac{1}{\|A_{ii}^{-1}\|}$$

1.2.2.6) LEMMA

Voraussetzungen :

Es gelten die Bezeichnungen aus Definition (1.2.2.5).

Für $A = (A_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}$ und $\det(A_{ii}) \neq 0$ für $i = 1, \dots, l$ sei

$$\hat{A} := (\hat{a}_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{1,1} \quad \text{mit } \hat{a}_{ij} := \|A_{ij}\|_{ij}$$

und

$$\check{A} := (\check{a}_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{1,1} \quad \text{mit } \check{a}_{ij} := \begin{cases} \mu_{ii}^* \cdot \|A_{ii}\|_{ii} & \text{für } i=j \\ -\|A_{ij}\|_{ij} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Für $\underline{\xi} := (\xi_j)_{j=1(1)l} \in X = \prod_{j=1}^l X_j$ sei

$$\underline{\eta} := (\eta_i)_{i=1(1)l} := \left(\sum_{j=1}^l A_{ij} \xi_j \right)_{i=1(1)l} = A \cdot \underline{\xi}$$

Behauptungen:

a) $\hat{A}$ ist Majorante von A und $\check{A}$ ist Minorante von A .

b) Es gilt komponentenweise

$$\hat{\eta} \leq \hat{A} \hat{\xi} \quad \text{und} \quad \check{\eta} \geq \check{A} \check{\xi}$$

Beweis:

Behauptung a) erhält man sofort aus Definition (1.2.2.5) d) und Lemma (1.2.2.4), Behauptung g) . $\square$

zu Behauptung b) :

Es gilt für $i = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i &= \|\eta_i\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^l A_{ij} \xi_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^l \|A_{ij}\|_{1j} \|\xi_j\|_j \\ &= (\hat{a}_{i1}, \dots, \hat{a}_{il}) \hat{\xi} \end{aligned}$$

Mit Lemma (1.2.2.4), Behauptung f) gilt für $i = 1, \dots, l$:

$$\begin{aligned}
 \eta_i &= \| A_{ii} \xi_i - \sum_{j, j \neq i} (-A_{ij}) \xi_j \|_i \\
 &\geq \| A_{ii} \xi_i \|_i - \sum_{j, j \neq i} \| A_{ij} \xi_j \|_i \\
 &\geq \mu^* \| [A_{ii}] \| \xi_i + \sum_{j, j \neq i} (-[A_{ij}]_{i,j}) \xi_j \\
 &= (\overset{\vee}{a}_{i1}, \dots, \overset{\vee}{a}_{in}) \hat{\xi}_i \quad . \quad \square
 \end{aligned}$$

Für nichtlineare Funktionen erhält man analog zur logarithmischen Matrixnorm die sog. Dahlquist-Konstanten wie folgt:

(1.2.2.7) DEFINITION : [vgl. (45)]

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^r$, $D \subset \mathbb{R}^r$ offen.

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^r$ "lokal lub-Lipschitz-stetig", d.h.

$$\forall K \subset \subset D : L_{\|\cdot\|}[K, g] := \sup_{\substack{\xi, \eta \in K \\ \xi \neq \eta}} \frac{\|g(\xi) - g(\eta)\|}{\|\xi - \eta\|} < \infty$$

Für $K \subset \subset D$, K wegzusammenhängend ¹⁾ heißt dann

$$M_{\|\cdot\|}[K, g] := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (L_{\|\cdot\|}[K, \text{id} + h \cdot g] - 1)$$

"lokale lub-Dahlquist-Konstante"²⁾ von g bezüglich $\|\cdot\|$.

1) vgl. (41), p. 99

2) lub: least upper bound, in (49), (50) werden auch glb-Dahlquist-Konstanten (greatest lower bound) betrachtet.

Die lub-Dahlquist-Konstante $M_{\|\cdot\|}[K, \underline{g}]$ einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion $\underline{g}$ ist also die Gateaux-Ableitung der Lipschitz-Konstanten $L_{\|\cdot\|}[K, \cdot]$ bei id (identische Abbildung) in Richtung $\underline{g}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Falls klar ist, welche Norm zugrundeliegt, wird auch kurz $L[K, \underline{g}]$ und $M[K, \underline{g}]$ geschrieben. Die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften sind zusammengefaßt in

(1.2.2.8) LEMMA : [siehe (50), pp. 28,29]

Voraussetzungen:

Sei $D \subset (\mathbb{R}^r, \|\cdot\|)$ offen, $K \subset\subset D$, K wegzusammenhängend und

$\underline{f}, \underline{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal lub-Lipschitz-stetig,

$\gamma \in \mathbb{R}^+$,

$\underline{h} \in C^1(D, \mathbb{R}^r)$.

Behauptungen:

$$a) \quad M_{\|\cdot\|}[K, \underline{f}] \leq L_{\|\cdot\|}[K, \underline{f}]$$

$$b) \quad M_{\|\cdot\|}[K, \gamma \underline{f}] \leq \gamma \cdot M_{\|\cdot\|}[K, \underline{f}]$$

$$c) \quad M_{\|\cdot\|}[K, \underline{f} + \underline{g}] \leq M_{\|\cdot\|}[K, \underline{f}] + M_{\|\cdot\|}[K, \underline{g}]$$

$$d) \quad \sup_{\underline{\xi} \in K} \left\| \frac{\partial \underline{h}(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right\| \leq L_{\|\cdot\|}[K, \underline{h}] \quad \text{und}$$

$$\sup_{\underline{\xi} \in K} \mu_{\|\cdot\|} \left[\frac{\partial \underline{h}(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right] \leq M_{\|\cdot\|}[K, \underline{h}].$$

Falls K konvex ist, gilt hier das Gleichheitszeichen.

(1.2.2.9) SATZ : [siehe (10), p. 12, 13 und (49), Theorem 1]

Voraussetzungen:

a) Sei $D \subset (\mathbb{R}^r, \|\cdot\|)$ offen, $K \subset\subset D$, K wegzusammenhängend und konvex. Ferner sei $T > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^r$.

b) Sei $\underline{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^r$ lokal lub-Lipschitz-stetig und $\rho \in C^0([0, T], \mathbb{R}_0^+)$.

c) Seien $\underline{u}, \underline{v} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^r)$, so daß gilt :

$$\underline{u}(0) = \underline{\alpha}, \quad \underline{v}(0) = \underline{\beta},$$

$$\underline{u}([0, T]) \subset K, \quad \underline{v}([0, T]) \subset K,$$

$$\dot{\underline{v}} = \underline{f}(\underline{v}) \quad \text{auf } [0, T] \quad \text{und}$$

$$\|\dot{\underline{u}} - \underline{f}(\underline{u})\| \leq \rho(t)$$

d) Sei $\chi \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ Lösung des AWP

$$\dot{\chi} = M_{\|\cdot\|} [K, \underline{f}] \cdot \chi + \rho(t) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \chi(0) = \|\underline{\alpha} - \underline{\beta}\|$$

Behauptung:

$$\forall t \in [0, T] : \|\underline{u}(t) - \underline{v}(t)\| \leq \chi(t)$$

(1.2.2.10) BEISPIEL :

Gegeben sei das AWP [vgl. Testproblem 1.2.2.1] :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \cdot \underline{z} \quad \text{auf } [0, \infty) \quad \text{mit} \quad \underline{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-10t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-9t}.$$

Anwendung der Maximum-Norm ergibt die Abschätzung

$$\|\dot{\underline{z}}(t)\|_{\infty} \leq 10 \|\underline{z}(t)\| \quad \text{auf } [0, \infty), \quad \|\underline{z}(0)\|_{\infty} = 1,$$

$$\text{d.h. } \|\underline{z}(t)\| \leq 1 \cdot e^{10t}.$$

Satz (1.2.2.9) ergibt dagegen mit $\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\beta} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $\underline{u} := \underline{z}$, $\underline{v} := 0$ und $\underline{f}(\underline{z}) := \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \underline{z}$; $\underline{\rho} = 0$:

$$\|\underline{z}(t)\|_{\infty} \leq 1 \cdot e^{-8t},$$

denn nach (1.2.2.8) Behauptung d) und Beispiel (1.2.2.3) b) ist

$$M_{\|\cdot\|_{\infty}}[\underline{f}] = \nu_{\|\cdot\|_{\infty}}[A] = \max \{-10, -8\} = -8.$$

1.2.3 Abschätzungen für die Iterierten des AWR-Algorithmus

Wie bereits aus Folgerung (1.2.1.8) ersichtlich ist, hängt die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus, falls Konvergenz gemäß Satz (1.2.1.6) nachgewiesen ist, wesentlich von der Länge des zugrundeliegenden Zeitintervalls $[0, T]$ ab. Ferner läßt sich anhand der auf $C^1([0, T], X)$ erklärten Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ [vgl. Satz (1.2.1.6), Voraussetzung c)] exponentielles Fehlerwachstum ableiten.

Da die in Satz (1.2.1.6) benutzte Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ und der dort angegebene Kontraktionsfaktor $\kappa(\alpha, \omega, \beta)$ von einem nur nach unten beschränkten Parameter β abhängen [vgl. Satz (1.2.1.6), Voraussetzungen c) und k)], sind die oben genannten Eigenschaften zu präzisieren, so daß sie für numerische Anwendungen nutzbar sind.

Zunächst wird für den AWR-Algorithmus eine Abschätzung mit einem Kontraktionsfaktor, in die als Parameter nur die Länge T des Zeitintervalls und die beiden Relaxationsparameter eingehen. In Teil 2 dieser Arbeit wird damit eine für schwach gekoppelte Systeme geeignete Formel zur Berechnung optimaler Relaxationsparameter entwickelt. Anschließend wird für

$\|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|$, $t \in [0, T]$, eine Abschätzung vom Gronwall'schen Typ hergeleitet, die eine genauere Beschreibung des experimentiellen Fehlerwachstums mit Hilfe von logarithmischen Matrixnormen und Dahlquist-Konstanten liefert und als Hilfsmittel für numerische Testrechnungen zur Ermittlung optimaler Relaxationsparameter [vgl. TEIL 5] anwendbar ist.

In Abschnitt 1.2.3 gelten die folgenden

(1.2.3.1) VORAUSSETZUNGEN und BEZEICHNUNGEN :

a) Sei $n, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$ und für $X := \mathbb{R}^n$ sei die Zerlegung $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$ ($j = 1, \dots, l$) gegeben. Ferner sei $m \in \mathbb{N}$, $D_{\underline{\xi}} \subset X$ und $D_{\underline{\varphi}} \subset \mathbb{R}^m$ seien offen und konvex, $T > 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{g} &:= X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\underline{\varphi}} \rightarrow X \\ (\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) &\mapsto \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) \end{aligned}$$

sei stetig differenzierbar in $\underline{\xi}$ auf $D_{\underline{\xi}}$ und stetig in $\underline{\psi}$ und $\underline{\varphi}$ auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $D_{\underline{\varphi}}$. $\underline{g}$ sei gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ partitioniert zu

$$\underline{g} = (g_j)_{j=1(1)l} \quad \text{mit} \quad g_j : D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\underline{\varphi}} \rightarrow X_j$$

$$G(\underline{\xi}, \underline{\varphi}) := (G_{1j}(\underline{\xi}, \underline{\varphi}))_{1,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{mit} \quad \text{1)}$$

$$G_{1j}(\underline{\xi}, \underline{\varphi}) := \frac{\partial g_{1j}(\underline{\xi}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})}{\partial \xi_j} \in \mathbb{R}^{n_1, n_j}$$

c) $S = (S_{1j})_{1,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ in Teilmatrizen $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n_1, n_j}$ partitioniert; S sei diagonaldominant mit positiven Diagonalelementen und nichtpositiven Nebendiagonalelementen, ferner sei S invertierbar.

1) $G = G(\underline{\xi}, \underline{\varphi})$ hängt nicht mehr von $\underline{\psi}$ ab, vgl. dazu Abschnitt 3.1

$$d) \quad S = L_S + D_S + U_S \quad \text{und}$$

$$G(\underline{\xi}, \underline{\varphi}) = L_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi}) + D_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi}) + U_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi})$$

seien als Summe der echten linken unteren Block-Dreiecksmatrizen L_S und $L_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi})$, der Block-Diagonalmatrizen D_S und $D_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi})$ und der echten rechten oberen Block-Dreiecksmatrizen U_S und $U_G(\underline{\xi}, \underline{\varphi})$ gemäß der Partitionierung in Teilmatrizen dargestellt. Es gelte:

$L_S + D_S$ ist streng diagonaldominant .

e) $\underline{\varphi} : [0, \infty) \rightarrow D_{\underline{\varphi}}$ sei stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$.

f) Gegeben sei das AWP

$$S \dot{\underline{p}} - \underline{g}(\underline{p}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) = 0 \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \dot{\underline{p}}(0) = \underline{\sigma}', \quad \underline{p}(0) = \underline{0} \quad ,$$

wobei

$$\underline{\sigma}' \in X \quad , \quad \underline{\sigma} \in D_{\underline{\xi}} \quad \text{mit}$$

$$S \underline{\sigma}' - \underline{g}(\underline{\sigma}, \dot{\underline{\varphi}}(0), \underline{\varphi}(0)) = 0$$

g) Auf das AWP f) werde der AWR-Algorithmus gemäß Definition (1.1.2.3) mit $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$ angewendet; dabei sei mit $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in D_{\underline{\xi}}$, $\underline{\psi} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{\varphi} \in D_{\underline{\varphi}}$

$$\tilde{\underline{g}}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi}) := (\underline{g}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}, \underline{\varphi}))_{j=1(1)1} \quad ,$$

$$\tilde{G}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) := (\tilde{G}_{1,j}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}))_{1,j=1(1)1} := (G_{ij}(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\varphi}))_{i,j=1(1)1}$$

mit der Zerlegung [vgl. Voraussetzung d)]

$$\tilde{G}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) = \tilde{L}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) + \tilde{D}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) + \tilde{U}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) \quad ,$$

$$\tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) := \frac{\alpha}{\omega} \tilde{L}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) + \frac{1}{\omega} \tilde{D}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi})$$

$$\tilde{R}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) := - (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \tilde{L}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) + (\frac{1}{\omega} - 1) \tilde{D}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}) - \tilde{U}_G(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi})$$

$$Q_S^{\alpha, \omega} := \frac{\alpha}{\omega} L_S + \frac{1}{\omega} D_S$$

$$R_S^{\alpha, \omega} := - (1 - \frac{\alpha}{\omega}) L_S + (\frac{1}{\omega} - 1) D_S - U_S$$

der k-te Relaxationsschritt gemäß Satz (1.2.1.6), Behauptung b) dargestellt.

h) Für die Folge $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C^1([0, T], X)$ der durch den

AWR-Algorithmus erzeugten Iterierten gelte

$$\exists \quad K_1 \subset \subset D_\xi \quad : \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad \forall \quad t \in [0, T] \quad : \quad \underline{p}^{(k)}(t) \in K_1$$

K_1 konvex und
wegzusammenhängend

i) Für $\beta, \gamma > 0$ sei auf $C^1([0, T], X)$ durch

$$\| \underline{x} \|_{C^1, \beta, \gamma} := \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{x}}(t) \| + \gamma \| \underline{x}(t) \|)$$

eine Norm erklärt, wobei $\| \cdot \|$ eine Norm auf X sei.

(1.2.3.2) SATZ (zweiter Konvergenzsatz) :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1). Ferner gelte:

a) $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf X und $\|\cdot\|$ sei die davon induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$.

$$b) \quad \gamma_1(\alpha, \omega) := \left\| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} R_S^{\alpha, \omega} \right\| > 0$$

$$\gamma_2(\alpha, \omega) := \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \left\| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{R}_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\eta}, \underline{\varphi}(t)) \right\| \geq 0$$

$$\gamma_3(\alpha, \omega) := \sup_{\substack{\xi \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \left\| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t)) \right\| \geq 0$$

c) Für die Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ ist

$$\beta := \gamma_1(\alpha, \omega)$$

$$\gamma_2(\alpha, \omega)$$

$$\gamma := \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\gamma_1(\alpha, \omega)}$$

Behauptungen:

a) Die Folge $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ der durch das AWR-Verfahren erzeugten Näherungslösungen für das AWP (1.2.3.1) f) genügt der

Abschätzung:

$$\forall_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq 2}} : \quad \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \kappa(\alpha, \omega, T) \|\underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)}\|_{C^1, \beta, \gamma}$$

wobei

$$\kappa(\alpha, \omega, T) := \gamma_1(\alpha, \omega) + [\gamma_1(\alpha, \omega) \gamma_3(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)] \cdot T$$

$$b) \quad \kappa(\alpha, \omega, T) < 1 \quad \text{für feste } \alpha, \omega \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha \leq \omega, \quad 0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1(\alpha, \omega) < 1 \quad \text{und} \quad 0 < T < \frac{1 - \gamma_1(\alpha, \omega)}{\gamma_1(\alpha, \omega) \gamma_3(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)}$$

Beweis:

zu Behauptung a) :

Sei $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ gemäß Voraussetzung (1.2.3.1) h) gegeben.

Dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \| = \\ & = \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [R_S^{\alpha, \omega} (\dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t)) \\ & \quad + \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) - \\ & \quad - \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{p}^{(k-2)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \| \\ & \leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} R_S^{\alpha, \omega} \| \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| \\ & \quad + \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [\underline{g}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) - \\ & \quad - \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{p}^{(k-2)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \| \\ & \quad + \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [\underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) - \\ & \quad - \underline{g}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \| \end{aligned}$$

Wegen $\underline{g}(\underline{\eta}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) = \underline{\tilde{g}}^{\alpha, \omega}(\underline{\eta}, \underline{\eta}, \underline{\psi}, \underline{\varphi})$ für $\underline{\eta} \in D_{\xi}$ $\underline{\psi}' \in \mathbb{R}^m$,
 $\underline{\psi} \in D_{\varphi}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} 1) \quad & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \| \leq \\ & \leq \gamma_1(\alpha, \omega) \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| \\ & + \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \underline{\tilde{g}}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\eta}, \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) \| \\ & \cdot \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \| \\ & + \sup_{\substack{\xi \in K_1 \\ t \in [0, 1]}} \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \underline{\tilde{g}}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) \| \\ & \cdot \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \| \end{aligned}$$

Mit Voraussetzung (1.2.3.1) b) und g) erhält man für $i = 1, \dots, l$
 und $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in D_{\xi}$, $\underline{\psi}' \in \mathbb{R}^m$, $\underline{\psi} \in D_{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} g_i^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) &= \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} g_i(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}', \underline{\psi}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{\delta}} g_i(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}', \underline{\psi}) \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ &= (G_{i1}(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}'), \dots, G_{il}(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}')) \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \underline{\delta}^{\alpha, \omega, i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{aligned}$$

$$= (\tilde{G}_{11}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}), \dots, \tilde{G}_{ii}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi})) \begin{pmatrix} (1 - \frac{\alpha}{\omega}) & & & 0 \\ & (1 - \frac{\alpha}{\omega}) & & \\ & & (1 - \frac{1}{\omega}) & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

↑
i-te Spalte

$$2) = (\dots, (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \tilde{G}_{ii-1}^{\alpha, \omega}(\dots), (1 - \frac{1}{\omega}) \tilde{G}_{ii}^{\alpha, \omega}(\dots), \tilde{G}_{ii+1}^{\alpha, \omega}(\dots), \dots)$$

und analog

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g_1^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) &= \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} g_1(\delta^{\alpha, \omega, 1}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}', \underline{\psi}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{\delta}} g_1(\delta^{\alpha, \omega, 1}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \underline{\psi}', \underline{\psi}) \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \delta^{\alpha, \omega, 1}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{aligned}$$

$$= (\tilde{G}_{11}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}), \dots, \tilde{G}_{ii}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi})) \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\omega} & & & 0 \\ & \frac{\alpha}{\omega} & & \\ & & \frac{1}{\omega} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

↑
i-te Spalte

$$3) = (\dots, \frac{\alpha}{\omega} \tilde{G}_{ii-1}^{\alpha, \omega}(\dots), \frac{1}{\omega} \tilde{G}_{ii}^{\alpha, \omega}(\dots), 0, \dots)$$

Aus 2), 3) folgt :

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \underline{g}^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) = \\
 & = (1 - \frac{\alpha}{\omega}) \widetilde{L}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}) - (\frac{1}{\omega} - 1) \widetilde{D}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}) + \widetilde{U}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}) \\
 & = - \widetilde{R}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \widetilde{g}^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) = \frac{\alpha}{\omega} \widetilde{L}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}) + \frac{1}{\omega} \widetilde{D}_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi}) \\
 & = Q_G^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\psi})
 \end{aligned}$$

Aus 1), 4), 5) folgt dann für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
 & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \| \\
 & \leq \gamma_1(\alpha, \omega) \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| \\
 & + \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} (-\widetilde{R}_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \eta, \varphi(t))) \| \cdot \\
 & \quad \cdot \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \| \\
 & + \sup_{\substack{\xi \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \widetilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t)) \| \cdot \\
 & \quad \cdot \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|
 \end{aligned}$$

$$6) \quad = \gamma_1(\alpha, \omega) \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| \\ + \gamma_2(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \| + \gamma_3(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|$$

$$7) \quad = \gamma_1(\alpha, \omega) (\| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| + \gamma \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|) \\ + \beta \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \| ,$$

wobei $\gamma := \frac{\gamma_2(\alpha, \omega)}{\gamma_1(\alpha, \omega)}$ und $\beta := \gamma_3(\alpha, \omega)$ gesetzt ist.

Setze $\rho(\alpha, \omega, t) := \| \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \| + \gamma \| \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t) \|$
für $t \in [0, T]$, dann folgt nach Lemma (1.2.1.2) :

$$8) \quad \forall_{t \in [0, T]} : \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \| \leq c(t, \alpha, \omega) ,$$

wobei $c(t, \alpha, \omega) \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ Lösung des AWP's .

$$\dot{c} = \gamma_1(\alpha, \omega) \rho(\alpha, \omega, t) + \beta c \quad \text{auf } [0, T] \quad \text{mit } c(0) = 0$$

ist. Damit ist für $t \in [0, T]$

$$c(t, \alpha, \omega) = e^{\beta t} \int_0^t \gamma_1(\alpha, \omega) \rho(\alpha, \omega, \tau) e^{-\beta \tau} d\tau \\ \leq \gamma_1(\alpha, \omega) e^{\beta t} \int_0^t \max_{\tau' \in [0, T]} [e^{-\beta \tau'} \rho(\alpha, \omega, \tau')] d\tau$$

$$9) \quad = \gamma_1(\alpha, \omega) e^{\beta t} \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \cdot t$$

Aus 7) und 9) ergibt sich dann für $t \in [0, T]$:

$$e^{-\beta t} (\| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \| + \gamma \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|)$$

$$\leq e^{-\beta t} \gamma_1(\alpha, \omega) \rho(\alpha, \omega, t) + e^{-\beta t} (\beta + \gamma) \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|$$

$$\leq \gamma_1(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

$$+ e^{-\beta t} (\beta + \gamma) t \gamma_1(\alpha, \omega) e^{\beta t} \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

$$= (\gamma_1(\alpha, \omega) + [\gamma_1(\alpha, \omega) \gamma_3(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)] T) \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

Durch Maximumbildung folgt daraus

$$\| \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \|_{C^1, \beta, \gamma} \leq (\gamma_1(\alpha, \omega) + [\gamma_1(\alpha, \omega) \gamma_3(\alpha, \omega) + \gamma_2(\alpha, \omega)] T) \cdot$$

$$\cdot \| \underline{p}^{(k-1)} - \underline{p}^{(k-2)} \|_{C^1, \beta, \gamma}$$

□

zu Behauptung b):

Nach Konstruktion von $\kappa(\alpha, \omega, T)$ gemäß Behauptung a) ist dies klar.

□

Im ersten Konvergenzsatz für den AWR-Algorithmus wird ein Kontraktionsfaktor $\kappa(\alpha, \omega, \beta)$ zu dem durch den AWR-Algorithmus erzeugten Operator

$$\underline{P} : (C^1([0, T], X), \|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}) \rightarrow (C^1([0, T], X), \|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma})$$

konstruiert [vgl. dazu Satz (1.2.1.6) Behauptungen c) und d) mit deren Beweis], der von einem Parameter β abhängt, welcher die Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ und somit das exponentielle Fehlerwachstum wesentlich beeinflusst. Nach Satz (1.2.3.2) kann für $\underline{P}$ ein Kontraktionsfaktor $\kappa(\alpha, \omega, T)$ angegeben werden, der nur von Größen des Anfangswertproblems und des zugehörigen AWR-Algorithmus und von der Länge T des Zeitintervalls bestimmt wird; die Kontraktivität von $\underline{P}$ wird dabei ausschließlich durch Einschränkung der Länge des Zeitintervalls unter der Voraussetzung, daß $\gamma_1(\alpha, \omega) < 1$ gilt, erzielt.

In Analogie zum Lemma von Gronwall [vgl. dazu (50), p. 214] wird im Folgenden eine Abschätzung für die Iterierten des AWR-Algorithmus gezeigt, die das exponentielle Fehlerwachstum der Waveform Relaxation explizit (d.h. ohne Verwendung der Norm

$\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$) charakterisiert.

(1.2.3.3) SATZ :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1). Ferner gelte :

a) $\|\cdot\|$ sei eine monotone Norm auf X und $\|\cdot\|$ sei die

davon induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$ und $\mu := \mu_{|| \cdot ||}$ sei die davon erzeugte logarithmische Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$.

$$b) \quad \theta_1(\alpha, \omega) := \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \| > 0$$

$$\theta_2(\alpha, \omega) := \sup_{\substack{\xi \in K_1 \\ t \in [0, 1]}} \mu[(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\xi, \underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t))]$$

c) Für $\underline{x} \in C^1([0, T], D_{\underline{\xi}})$, $\underline{\psi} \in C^1([0, T], D_{\underline{\varphi}})$ sei

$$\rho_{\max}(\underline{x}, \underline{\psi}) := \max_{t \in [0, T]} \| \underline{\rho}(\underline{x}(t), \underline{\psi}(t)) \|, \text{ wobei}$$

$$\underline{\rho}(\underline{x}(t), \underline{\psi}(t)) := S \dot{\underline{x}}(t) - \underline{g}(\underline{x}(t), \dot{\underline{\psi}}(t), \underline{\psi}(t))$$

Behauptung:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : \quad \forall_{t \in [0, T]} :$$

$$\| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \| \leq \begin{cases} \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \theta_1(\alpha, \omega) \frac{e^{\theta_2(\alpha, \omega) t} - 1}{\theta_2(\alpha, \omega)}, & \text{falls } \theta_2(\alpha, \omega) > 0 \\ \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \theta_1(\alpha, \omega) t, & \text{falls } \theta_2(\alpha, \omega) \leq 0 \end{cases}$$

Beweis:

Sei $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ gemäß Voraussetzung (1.2.3.1) h) gegeben.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, T]$ gilt dann nach Definition des AWR-

Algorithmus [vgl. (1.1.2.3) und Satz (1.2.1.6), Behauptung b)]:

$$\begin{aligned}
 0 &= \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}) - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \{ R_S^{\alpha, \omega} (\dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(\underline{t})) \\
 &\quad + \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) - \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \} \\
 &= \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}) - Q_S^{\alpha, \omega}{}^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \\
 &\quad - \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) + (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \\
 &\quad - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \{ R_S^{\alpha, \omega} (\dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) - \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(\underline{t})) \\
 &\quad + \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) - \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \} \| \\
 &\geq \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}) - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \| \\
 &\quad - \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \{ R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)} - R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(\underline{t}) \\
 &\quad + S \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) - \rho(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) - Q_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(\underline{t}) + R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(\underline{t}) \} \|
 \end{aligned}$$

Wegen $S = Q_S^{\alpha, \omega} - R_S^{\alpha, \omega}$ erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
 1) \quad &\| \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}) - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \| \\
 &\leq \| - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \rho(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \| \\
 &\leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \| \rho(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \| \\
 &\leq \Theta_1(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi})
 \end{aligned}$$

Setzt man für $\underline{x} \in C^1([0, T], D_{\underline{\xi}})$

$$\underline{f}(\underline{x}(t)) := (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{x}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))$$

so gilt mit $\underline{u} := \underline{p}^{(k)}$ und $\underline{v} := \underline{p}^{(k-1)}$ nach 1) :

$$\|\dot{\underline{u}} - \underline{f}(\underline{u})\| < O_1(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \quad , \quad \text{auf } [0, T] \quad ,$$

$$\dot{\underline{v}} - \underline{f}(\underline{v}) = 0 \quad \text{auf } [0, T] \quad \text{und}$$

$$\|\underline{u}(0) - \underline{v}(0)\| = \|\underline{g} - \underline{g}\| = 0$$

Satz (1.2.2.9) liefert dann:

$$2) \quad \forall_{t \in [0, T]} : \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\| \leq \chi(t)$$

wobei $\chi \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ Lösung des AWP

$$3) \quad \dot{\chi} = M_{\|\cdot\|} [K_1, \underline{f}] \chi + O(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \chi(0) = 0$$

ist. Mit Lemma (1.2.2.8), Behauptung d) und mit 5) aus dem Beweis zu Satz (1.2.3.2) erhält man:

$$M_{\|\cdot\|} [K_1, \underline{f}] = \sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \mu[(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))]$$

$$= \sup_{\substack{\underline{\xi} \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \mu[(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t))]$$

$$= \Theta_2(\alpha, \omega)$$

Mit 3) ist dann :

$$\begin{aligned}
 4) \quad \chi &= e^{\theta_2(\alpha, \omega) t} \theta_1(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \int_0^t e^{-\theta_2(\alpha, \omega) \tau} d\tau \\
 &= \theta_1(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{e^{\theta_2(\alpha, \omega) t} - 1}{\theta_2(\alpha, \omega)} \\
 &= \theta_1(\alpha, \omega) \rho_{\max}(\underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) t h(\theta_2(\alpha, \omega), t)
 \end{aligned}$$

wobei für die Funktion $h(\theta, t) := \frac{e^{\theta t} - 1}{\theta t}$ gilt :

$$5) \quad \lim_{\theta t \rightarrow 0} h(\theta, t) = 1 \quad \text{und}$$

$$h(\theta, t) \leq 1 \quad \text{für} \quad \theta \leq 0 \quad \text{und} \quad t \in [0, \infty)$$

Mit 2), 4), 5) erhält man schließlich die Behauptung. $\square$

TEIL 2: KONSTRUKTION OPTIMALER RELAXATIONSPARAMETER FÜR DIE WAVEFORM RELAXATION

Numerische Tests an geeigneten Beispielen [siehe Teil 5] lassen erkennen, daß im ersten Relaxationsschritt eine Näherungslösung $\underline{p}^{(1)} \in C^1([0,T],X)$ erzeugt wird, die sich von der Startlösung $\underline{S} \in C^1([0,T],X)$ i.a. stark unterscheidet, während in den folgenden Relaxationsschritten die Differenz $\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}$ (für $k \geq 2$) monoton abnimmt. Da $\beta^{(k)}$, $\underline{p}^{(k-1)}$ implizit über das im k -ten bzw. $(k-1)$ -ten Relaxationsschritt des AWR-Algorithmus (1.1.2.3) zu lösende Anfangswertproblem von den Relaxationsparametern abhängt, kann versucht werden, durch Minimierung von $\|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|$ (wobei $\|\cdot\|$ eine geeignete Norm bezeichne) optimale Relaxationsparameter α und ω zu konstruieren. Dazu werden hier zwei unterschiedliche Möglichkeiten untersucht. In Abschnitt 2.1 werden Abschätzungen aus Teil 1 benutzt, um für lineare Systeme eine Formel zur Berechnung günstiger Konstanten für α, ω zu gewinnen und um für allgemeine Systeme ein Optimierungsproblem herzuleiten, dessen Nebenbedingung eine die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus regelnde Differentialgleichung ist.

In Abschnitt 2.2 wird unter der Annahme gewisser Differenzierbarkeitseigenschaften ein Optimierungsproblem angegeben, das über die Kuhn-Tucker-Bedingungen zu einem Algorithmus führt, der durch Lösen einer zusätzlichen Differentialgleichung in jedem Relaxationsschritt optimale Relaxationsparameter für den Fall $\alpha = \omega$ liefert.

In beiden Fällen erweisen sich optimale Relaxationsparameter α, ω als Funktionen über dem Zeitintervall $[0,T]$.

2.1 Optimale Parameter α, ω aufgrund von Abschätzungen für die Waveform Relaxation

Zunächst werden in Abschnitt 2.1.1 für die Anwendung des AWR-Algorithmus auf Anfangswertprobleme für lineare, implizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die das dynamische Verhalten spezieller MOS-Schaltungen, welche aus schwach gekoppelten Teilschaltungen zusammengesetzt sind, beschreiben, im Fall $\alpha = \omega$ günstige Relaxationsparameter ω ohne Bestimmung von Eigenwerten durch Lösen quadratischer Gleichungen berechnet, die in jedem Relaxationsschritt ohne großen Aufwand aus den Schaltdaten erzeugt werden können. Dabei erweist sich in einem Spezialfall $\omega = 1$ [$\alpha = \omega = 1$ ergibt die Gauss-Seidel Waveform Relaxation] als Lösung.

In Abschnitt 2.1.2 wird eine Differentialungleichung für die Lösungen zweier aufeinanderfolgender Relaxationsschritte hergeleitet, die die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus - nun für AWP's zu beliebigen MOS-Schaltungen - regiert. Eine Bestimmung der optimalen Relaxationsparameter auf der Basis dieser Abschätzung führt auf ein dynamisches Optimierungsproblem mit nicht-holonomen Nebenbedingungen. Dadurch ist es möglich, unter recht allgemeinen Bedingungen die Existenz von optimalen Parametern hinsichtlich der genannten Differentialgleichung nachzuweisen. Obwohl sich hier eine numerische Bestimmung von α und ω nach der diesem Beweis zugrundeliegenden Bellman'schen Funktionalgleichung aus Aufwandsgründen verbietet, erhält man doch als grundlegende Erkenntnis, daß im oben angesprochenen Sinne optimale Relaxationsparameter für den AWR-Algorithmus Funktionen auf dem Zeitintervall $[0, T]$ sein müssen.

2.1.1 Eine Formel zur Bestimmung geeigneter Relaxationsparameter für lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Nach den Konvergenzsätzen (1.2.1.6) und (1.2.3.2) konvergiert die Waveform Relaxation linear bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$.

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist nach Satz (1.2.3.2) durch den Kontraktionsfaktor $\kappa(\alpha, \omega, T)$ bestimmt; seine Abhängigkeit von den Relaxationsparametern α und ω ist jedoch i.a. nicht explizit darstellbar. Für die Anwendung des AWR-Algorithmus (1.1.2.3) zur näherungsweisen Lösung von Anfangswertproblemen für lineare, implizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen wird deshalb eine zu Satz (1.2.3.2) analoge Abschätzung hergeleitet, aufgrund der eine Formel zur Bestimmung von ω (unter der Voraussetzung $\alpha = \omega$) angegeben werden kann, so daß der Kontraktionsfaktor minimal wird. Dabei werden Majoranten und Minoranten für Matrizen eingesetzt, um die Partitionierung des gegebenen Gleichungssystems bei der Gewinnung der für die Formel benötigten Werte während der numerischen Durchführung der Waveform Relaxation ausnützen zu können. Die Voraussetzung $\alpha = \omega$ ist hier durch numerische Testrechnungen, in denen mit einem heuristischen Verfahren optimale Relaxationsparameter erzeugt wurden [siehe TEIL 5], gerechtfertigt.

(2.1.1.1) SATZ :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) und sei $\alpha = \omega$.

a) $X = \mathbb{R}^n$ sei durch $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ normiert. Sei $X_0 := \mathbb{R}^1$. Die Maximum-Normen auf den Räumen X_j seien für $j = 0, 1, \dots, l$ mit $\|\cdot\|_{j,\infty}$ bezeichnet, $\llbracket \cdot \rrbracket_\infty$ bzw. $\llbracket \cdot \rrbracket_{1j,\infty}$ bezeichnen die von $\|\cdot\|_\infty$ bzw. $\|\cdot\|_{1,\infty}$, $\|\cdot\|_{j,\infty}$ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_1,n_j}$ induzierten Matrixnormen für $i, j = 1, \dots, l$. $\llbracket \cdot \rrbracket_{0,\infty}$ bezeichne die von $\|\cdot\|_{0,\infty}$ auf $\mathbb{R}^{1,1}$ induzierte Matrixnorm [vgl. Definition (1.2.2.5) b), c)] .

b) Für die rechte Seite $\underline{g}$ des Differentialgleichungssystems gelte [vgl. Voraussetzung (1.2.3.1) b)] :

$$\underline{g}(\underline{\xi}, \varphi(t), \underline{\varphi}(t)) = H \cdot \underline{\xi} + \underline{b}(t) \quad \text{für } \underline{\xi} \in D_{\underline{\xi}}, \quad t \in [0, T],$$

wobei

$$H := (H_{ij})_{i,j=1(1)l} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{mit } H_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i,n_j} \quad \text{und} \\ \underline{b} \in C([0, T], X) \quad \text{sei.}$$

c) Es seien folgende Konstanten gegeben [vgl. Definition (1.2.2.5)] :

$$\delta_s := \min_{i=1, \dots, l} (-\mu \|\cdot\|_{i,\infty} \llbracket -S_{ii} \rrbracket)$$

$$l_s := \max_{i=1, \dots, l} \sum_{j < i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij,\infty}, \quad l_H := \max_{i=1, \dots, l} \sum_{j < i} \llbracket H_{ij} \rrbracket$$

$$d_s := \max_{i=1, \dots, l} \llbracket S_{ii} \rrbracket_{ii,\infty}, \quad d_H := \max_{i=1, \dots, l} \llbracket H_{ii} \rrbracket_{ii,\infty},$$

$$u_s := \max_{i=1, \dots, l} \sum_{j > i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij,\infty}, \quad u_H := \max_{i=1, \dots, l} \sum_{j > i} \llbracket H_{ij} \rrbracket_{ij,\infty}$$

$$\omega_0 := \frac{d_s - \delta_s}{d_s - 1 - u_s}$$

d) Es gelte $\delta_S > 1_S + u_S$ und $u_S < 0$.

$$e) \quad \delta(\omega) := \frac{(1-\omega)d_S + \omega u_S}{\delta_S - \omega 1_S}, \quad \gamma := \gamma(\omega) := \frac{(1-\omega)d_H + \omega u_H}{(1-\omega)d_S + \omega u_S},$$

$$\theta := \theta(\omega) := \frac{d_H + \omega 1_H}{\delta_S - \omega 1_S}$$

Behauptungen:

a) Ist für $0 < \omega_O \leq \omega \leq 1$ die quadratische Gleichung

$$[(1-\omega)d_H + \omega u_H][\delta_S - \omega 1_S] + [d_H + \omega 1_H][(1-\omega)d_S + \omega u_S] = 0$$

erfüllt, so gilt die Abschätzung

$$\| \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \|_{C^1, \theta, \gamma} < \delta(\omega) \| \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \|_{C^1, \theta, \gamma}$$

b) $0 \leq \omega_O < 1$ und

$$0 < \delta(\omega) < 1 \quad \text{für } \omega \in [\omega_O, 1], \quad \omega \neq 0$$

c) Die quadratische Gleichung aus Behauptung a) hat die reellen Lösungen

$$\omega_{1,2} = \frac{a+b-c \pm \sqrt{(a+b-c)^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\text{falls } a \neq 0 \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

bzw.

$$\omega_1 = \frac{b}{b-c}, \quad \text{falls } a = 0 \quad \text{und} \quad b > c,$$

wobei gilt:

$$a := l_s(d_H - u_H) - l_H(d_s - u_s)$$

$$b := d_H(d_s + \delta_s) > 0$$

$$c := u_H(\delta_s - l_s) + u_s(d_H + l_H) \quad .$$

Beweis:

zu Behauptung a) :

Sei $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C^1([0, T], X)$ gemäß Voraussetzung (1.2.3.1) h) gegeben. Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $t \in [0, T]$ sei dann :

$$\underline{\xi} := \underline{p}^{(k)}(t) \quad , \quad \underline{\xi}' := \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) \quad ,$$

$$\underline{\eta} := \underline{p}^{(k-1)}(t) \quad \underline{\eta}' := \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) \quad ,$$

$$\underline{\zeta} := \underline{p}^{(k-2)}(t) \quad \underline{\zeta}' := \dot{\underline{p}}^{(k-2)}(t) \quad .$$

Dann gilt mit Voraussetzung (1.2.3.1) q) und Voraussetzung b):

$$\begin{aligned} 1) \quad Q_S^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}' - \underline{\eta}') &= R_S^{\alpha, \omega}(\underline{\eta}' - \underline{\zeta}') + \widetilde{Q}^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t)) - \widetilde{Q}^{\alpha, \omega}(\underline{\eta}, \underline{\zeta}, \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t)) \\ &= R_S^{\alpha, \omega}(\underline{\eta}' - \underline{\zeta}') + Q_H^{\alpha, \omega}(\underline{\xi} - \underline{\eta}) - R_H^{\alpha, \omega}(\underline{\eta} - \underline{\zeta}) \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$Q_H^{\alpha, \omega} := \frac{\alpha}{\omega} L_H + \frac{1}{\omega} D_H = \widetilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi}(t))$$

$$R_H^{\alpha, \omega} := -(1 - \frac{\alpha}{\omega}) L_H + (1 - \frac{1}{\omega}) D_H - U_H = \widetilde{R}_G^{\alpha, \omega}(\underline{\eta}, \underline{\zeta}, \underline{\varphi}(t)) \quad ,$$

$$L_H := \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ H_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & H_{11-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad D_H := \begin{pmatrix} H_{11} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & H_{11} \end{pmatrix}$$

$$U_H := \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & H_{11} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{1-1,1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

[vgl. Hierzu 4) und 5) im Beweis zu Satz (1.2.3.2)] .

Da für $\underline{\rho} = (\rho_j)_{j=1(1)1} \in X = \prod_{j=1}^1 X_j$

$$\|\underline{\rho}\| = \|\underline{\rho}\|_{\infty} = \max_{j=1(1)1} \|\rho_j\|_{j,\infty} = \|(\|\rho_1\|_{1,\infty}, \dots, \|\rho_1\|_{1,\infty})^T\|_{0,\infty}$$

erfüllt ist, folgt aus 1) mit Lemma (1.2.2.6) :

$$\begin{aligned} 2) \quad & Q_S^{\alpha,\omega} (\underline{\xi}' - \underline{\eta}')^{\wedge} - Q_H^{\alpha,\omega} (\underline{\xi} - \underline{\eta})^{\wedge} \leq \\ & \leq (Q_S^{\alpha,\omega} (\underline{\xi}' - \underline{\eta}'))^{\wedge} - (Q_S^{\alpha,\omega} (\underline{\xi} - \underline{\eta}))^{\wedge} \\ & \leq (Q_S^{\alpha,\omega} (\underline{\xi}' - \underline{\eta}') - Q_H^{\alpha,\omega} (\underline{\xi} - \underline{\eta}))^{\wedge} \\ & = R_S^{\alpha,\omega} (\underline{\eta}' - \underline{\zeta}') - R_H^{\alpha,\omega} (\underline{\eta} - \underline{\zeta})^{\wedge} \\ & \leq (R_S^{\alpha,\omega} (\underline{\eta}' - \underline{\zeta}'))^{\wedge} + (R_H^{\alpha,\omega} (\underline{\eta} - \underline{\zeta}))^{\wedge} \end{aligned}$$

$$\leq \hat{R}_S^{\alpha, \omega} (\underline{\eta}' - \underline{\zeta}')^\wedge + \hat{R}^{\alpha, \omega} (\underline{\eta} - \underline{\zeta})^\wedge \in \mathbb{R}^1 - X_0$$

wobei die Ungleichheitszeichen komponentenweise für Vektoren aus X_0 zu verstehen sind. Anwendung der Norm $\|\cdot\|_{0, \infty}$ auf die Ungleichung 2) ergibt dann mit Lemma (1.2.2.4) f):

$$\begin{aligned} 3) \quad \mu_{\|\cdot\|_{0, \infty}}^* [\hat{Q}_S^{\alpha, \omega}] \|\underline{\xi}' - \underline{\eta}'\| &= \mu_{\|\cdot\|_{0, \infty}}^* [\hat{Q}_S^{\alpha, \omega}] \|(\underline{\xi}' - \underline{\eta}')^\wedge\|_{0, \infty} \\ &\leq \|\hat{Q}_S^{\alpha, \omega} (\underline{\xi}' - \underline{\eta}')^\wedge\|_{0, \infty} \\ &\leq \|\hat{R}_S^{\alpha, \omega} (\underline{\eta}' - \underline{\zeta}')^\wedge\|_{0, \infty} + \|\hat{R}_H^{\alpha, \omega} (\underline{\eta} - \underline{\zeta})^\wedge\|_{0, \infty} + \|\hat{Q}_H^{\alpha, \omega} (\underline{\xi} - \underline{\eta})^\wedge\|_{0, \infty} \\ &\leq \|\hat{R}_S^{\alpha, \omega}\|_{0, \infty} \|\underline{\eta}' - \underline{\zeta}'\|_{\infty} + \|\hat{R}_H^{\alpha, \omega}\|_{0, \infty} \|\underline{\eta} - \underline{\zeta}\|_{\infty} + \|\hat{Q}_H^{\alpha, \omega}\|_{0, \infty} \|\underline{\xi} - \underline{\eta}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Im Folgenden sei nun $\alpha = \omega$.

Da nach Voraussetzung (1.2.3.1) c) d) $L_S + D_S$ und somit auch D_S und S_{ii} , $i = 1, \dots, l$, streng diagonaldominant mit positiven Diagonalelementen ist, gilt für $i = 1, \dots, l$ nach Lemma (1.2.2.4) f) und Beispiel (1.2.2.3) b):

$$\mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}}^* [S_{ii}] = \max \{ -\mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}} [-S_{ii}], -\mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}} [S_{ii}] \}$$

$$4) \quad -\mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}} [-S_{ii}] =: \delta_S > 0$$

und

$$\begin{aligned} -\mu_{\|\cdot\|_{0, \infty}} [-\hat{Q}_S^{\omega, \omega}] &= -\max_{i=1, \dots, l} \{ -\mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}}^* [\frac{1}{\omega} \rho_{ii}] + \sum_{j < i} [S_{ij}]_{ij, \infty} \} \\ &= -\max_{i=1, \dots, l} \{ \frac{1}{\omega} \mu_{\|\cdot\|_{1, \infty}} [-S_{ii}] + \sum_{j < i} [S_{ij}]_{ij, \infty} \} = \end{aligned}$$

$$5) = \min_{i=1, \dots, l} \left\{ \frac{1}{\omega} (-\mu \parallel \cdot \parallel_{i, \infty} [-S_{ii}]) - \sum_{j < i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty} \right\}$$

$$\geq \frac{1}{\omega} \min_{i=1, \dots, l} \left\{ -\mu \parallel \cdot \parallel_{i, \infty} [-S_{ii}] \right\} - \max_{i=1, \dots, l} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty}$$

$$6) = \frac{1}{\omega} \cdot \delta_S - l_S$$

Da analog gilt

$$\begin{aligned} -\mu \parallel \cdot \parallel_{0, \infty} [Q_S^{\vee \omega, \omega}] &= - \max_{i=1, \dots, l} \left\{ \mu^* \parallel \cdot \parallel_{i, \infty} \left[\frac{1}{\omega} S_{ii} \right] + \sum_{j < i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty} \right\} \\ &= \min_{i=1, \dots, l} \left\{ \frac{1}{\omega} \mu \parallel \cdot \parallel_{i, \infty} [-S_{ii}] - \sum_{j < i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty} \right\}, \end{aligned}$$

erhält man daraus mit 4), 5), 6) und Voraussetzung d):

$$\begin{aligned} 7) \quad \mu^* \parallel \cdot \parallel_{0, \infty} [Q_S^{\vee \omega, \omega}] &= \max \left\{ -\mu \parallel \cdot \parallel_{0, \infty} [-Q_S^{\vee \omega, \omega}], -\mu \parallel \cdot \parallel_{0, \infty} [Q_S^{\vee \omega, \omega}] \right\} \\ &= -\mu \parallel \cdot \parallel_{0, \infty} [-Q_S^{\vee \omega, \omega}] \geq \frac{1}{\omega} \delta_S - l_S > 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} 8) \quad \llbracket R_S^{\omega, \omega} \rrbracket_{0, \infty} &= \llbracket ((\frac{1}{\omega} - 1)D_S + U_S)^\wedge \rrbracket_{0, \infty} \\ &= \max_{i=1, \dots, l} \left\{ (\frac{1}{\omega} - 1) \llbracket S_{ii} \rrbracket_{ii, \infty} + \sum_{j > i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty} \right\} \\ &\leq (\frac{1}{\omega} - 1) \max_{i=1, \dots, l} \llbracket S_{ii} \rrbracket_{ii, \infty} + \max_{i=1, \dots, l} \sum_{j > i} \llbracket S_{ij} \rrbracket_{ij, \infty} \\ &= (\frac{1}{\omega} - 1) d_S + u_S > 0 \quad \text{nach Voraussetzung d)}. \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$9) \quad \|\mathbb{Q}_H^{(\omega, \omega)}\|_{0, \infty} \leq \frac{1}{\omega} d_H + l_H ,$$

$$10) \quad \|\mathbb{R}_H^{(\omega, \omega)}\|_{0, \infty} \leq \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) d_H + u_H .$$

Aus 3), 6), 7), 8) erhält man dann für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} 11) \quad \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|_{\infty} &\leq \delta(\omega) \|\underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t)\|_{\infty} + \\ &+ \gamma(\omega) \|\underline{p}^{(k-1)}(t) + \underline{p}^{(k-2)}(t)\|_{\infty} + \theta(\omega) \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|_{\infty} \end{aligned}$$

wobei

$$\delta(\omega) := \frac{(1-\omega) d_S + \omega l_S}{\delta_S - \omega l_S} > 0$$

$$\gamma(\omega) := \frac{(1-\omega) d_H + \omega u_H}{(1-\omega) d_S + \omega u_S} > 0$$

$$\theta(\omega) := \frac{d_H + \omega l_H}{\delta_S - \omega l_S}$$

Wie im Beweis zu Satz (1.2.1.6), Behauptung c) (vgl. dort 2), ..., 8)

und setze $\gamma_1 := \theta$, $\gamma_2 := \delta \cdot \gamma$ erhält man aus 11):

$$12) \quad \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, \beta, \gamma} \leq \delta(\omega) \left[1 + \frac{\gamma(\omega) + \theta(\omega)}{\beta - \theta(\omega)} \right] \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, \beta, \gamma}$$

mit $\beta > \theta(\omega)$.

Falls

$$[(1-\omega) d_H + \omega u_H][\delta_S - \omega l_S] + [d_H + \omega l_H][(1-\omega) d_S + \omega u_S] = 0 ,$$

$$\text{d.h. } \gamma(\omega) + \theta(\omega) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega [-1_S (d_H - u_H) + 1_H (d_S - u_S) - d_H (d_S + \delta_S) + u_H (\delta_S - 1_S) + u_S (d_H + 1_H)] \\
 & + d_H (d_S + \delta_S) \\
 = & a\omega^2 - (a+b-c)\omega + b = 0
 \end{aligned}$$

hat die beiden Lösungen

$$\omega_{1,2} = \frac{a+b-c \pm \sqrt{(a+b-c)^2 - 4ab}}{2a}$$

falls $a \neq 0$ gilt. Dabei sind $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, falls zusätzlich

$$(a+b-c)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

erfüllt ist. Für $a = 0$ hat man unter der Voraussetzung

$$b > 0, \quad c > 0$$

als einzige Lösung

$$\omega_1 = \frac{b}{b-c} \quad . \quad \square$$

(2.1.1.2) BEMERKUNGEN zu Satz (2.1.1.1) :

a) Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz konvergiert der AWR-Algorithmus mit den Voraussetzungen von Satz (2.1.1.1), wenn

$$\kappa(\omega, \beta) := \delta(\omega) \left[1 + \frac{\gamma(\omega) + \theta(\omega)}{\beta - \delta(\omega)} \right] < 1$$

erfüllt ist. Für

$$\beta > \frac{\theta(\omega) + \delta(\omega)\gamma(\omega)}{1 - \delta(\omega)} =: \beta_0(\omega) \quad \text{und} \quad \delta(\omega) < 1$$

ist dies gegeben (vgl. dazu 12) im Beweis zu Satz (2.1.1.1), Re-

hauptung a), und Satz (1.2.1.6)]. Da der Fehler

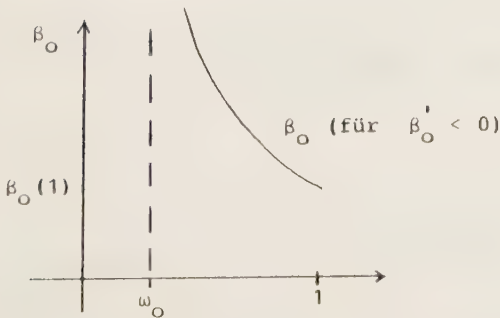
$\| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \|$ für $t = T$, dem rechten Rand des Zeitintervalls $[0, T]$, mindestens mit dem Faktor $e^{-\beta_O(\omega)T}$ gedämpft wird, scheint es zunächst sinnvoll zu sein, $\beta_O(\omega)$ im Intervall $\omega \in [\omega_O, 1]$ (o.B.d.A. $\omega_O > 0$) zu minimieren. Es gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$\beta_O(\omega) = \frac{-\omega(d_H - 1_H - u_H) + 2d_H}{\omega(d_S - 1_S - u_S) - (d_S - \delta_S)} ,$$

$$\beta'_O(\omega) = - \frac{(d_H - 1_H - u_H)(d_S - \delta_S) + 2d_H(d_S - 1_S - u_S)}{[\omega(d_S - 1_S - u_S) - (d_S - \delta_S)]^2}$$

$$\beta_O(1) = \frac{d_H + 1_H + u_H}{\delta_S - 1_S - u_S}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_O} \beta_O(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{für } \beta'_O(\omega) < 0 \\ -\infty & \text{für } \beta'_O(\omega) > 0 \end{cases}$$



Die Minimierung von $\beta_O(\omega)$ ist somit nur für $\beta'_O < 0$ auf dem Intervall $[\omega_O, 1]$ erfolgreich, und zwar mit $\omega_{\min} = 1$. Stattdessen ist besser folgende Beobachtung auszunutzen:

$$(*) \quad \kappa(\omega, \beta) = \delta(\omega) , \quad \text{falls } \theta(\omega) + \gamma(\omega) = 0 .$$

In Satz (2.1.1.1), Behauptung c), wird eine Formel zur Bestimmung eines $\omega \in \mathbb{R}$ angegeben, so daß (*) gilt; es ist dabei zu prüfen, ob $\omega_1, \omega_2 \in [\omega_0, 1]$ erfüllt ist.

b) Für Satz (2.1.1.1) ist insbesondere Voraussetzung d) wesentlich. Sie ist für eine MOS-Schaltung erfüllt, wenn gilt [vgl. dazu TEIL 3, Abschnitt 3.1] :

Das Minimum aller Knotenkapazitäten zu "ground" ist größer als alle Summen der Kopplungskoeffizienten der einzelnen Knoten der Schaltung.

c) Spezialfall für Behauptung (2.1.1.1) c):

Ist $a \leq b$ und $c = 0$, so ist $\omega_1 = 1$ eine Lösung der quadratischen Gleichung aus Behauptung a), denn dann hat man für $a = 0$:

$$\omega_1 = \frac{b}{b} = 1 \quad \text{und für } a \neq 0 :$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{a+b - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2a} = \frac{a+b - \sqrt{(a-b)^2}}{2a} \\ &= \frac{a+b - (b-a)}{2a} = 1 \end{aligned}$$

2.1.2 Ein dynamisches Optimierungsproblem mit nichtholonomen Nebenbedingungen für den AWR-Algorithmus

Bei der näherungsweisen Lösung eines Anfangswertproblems für ein großes System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen mit nichtlinearer rechter Seite $\underline{g}$, wie sie in Voraussetzung

(1.2.3.1) b) beschrieben ist, kann Satz (2.1.1.1) und die dort angegebene Formel nicht zur Konvergenzverbesserung genutzt werden. Im Folgenden soll deshalb untersucht werden, wie sich die Aufgabe, die Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus durch eine geeignete Wahl der Relaxationsparameter aufgrund von Abschätzungen aus Abschnitt 1.2 zu erhöhen, im allgemeinen Fall darstellt.

Nach dem ersten Konvergenzsatz (1.2.1.6) konvergiert die zweiparametrische Waveform Relaxation gleichmäßig gegen die exakte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, sofern bestimmte Voraussetzungen, die von MOS-Schaltungen i.a. erfüllt werden, gelten. Geht man auch bei der Betrachtung der gleichmäßigen Konvergenz der Waveform Relaxation davon aus, daß wie bei der in Satz (1.2.1.6) verwendeten Norm $\|\cdot\|_{C^1, \beta, \gamma}$ lineare Konvergenz vorliegt, so ist im k-ten Relaxationsschritt ($k = 1, 2, \dots$)

$$\kappa^{(k)}(\alpha, \omega) := \frac{\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\|}{\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t)\|},$$

für $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$ zu minimieren. $(\underline{p}^{(k)})$ bezeichne dabei die Folge der durch den AWR-Algorithmus erzeugten Näherungslösungen und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $X := \mathbb{R}^n$. Hier gilt nun

$$\kappa^{(k)}(\alpha, \omega) \leq \frac{\max_{t \in [0, T]} \chi^{(k)}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix})}{\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{p}^{(k-2)}(t)\|},$$

wobei $\chi^{(k)}(\cdot, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}) \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ Lösung eines (skalaren) Anfangswertproblems ist, welches auf eine dem System von Differentialgleichungen zur Beschreibung der gegebenen Schaltung zugeordnete Differentialungleichung der Form [vgl. Satz (1.2.2.9) und den Beweis zu Satz (1.2.3.3)]

$$\|\dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - \underline{f}(\underline{p}^{(k)}(t), \alpha, \omega)\| \leq \theta_1^{(k)}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}), \quad t \in [0, T],$$

gestützt ist. Diese Differentialungleichung führt durch geeignete Linearisierung und Abschätzung auf die "gröbere" Differentialungleichung 1) aus dem Beweis zu Satz (1.2.3.2), Behauptung a), die mit Hilfe von Lemma (1.2.1.2) die Kontraktivität des durch den AWR-Algorithmus auf $C^1([0, T], X)$ definierten Operators liefert. Anstelle von $\kappa^{(k)}(\alpha, \omega)$ wird nun ersatzweise

$$F(\chi^{(k)}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}) := \max_{t \in [0, T]} \chi(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix})$$

für $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$ minimiert. Man erhält schließlich ein sog. dynamisches Optimierungsproblem für das Funktional F unter nichtholomorphen Nebenbedingungen [siehe K. Neumann, (36)]. Für diese Optimierungsprobleme existieren nun Lösungen $\alpha, \omega \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2)$, d.h. die Relaxationsparameter α, ω sind als Funktionen auf dem Intervall $[0, T]$ - also als zeitabhängige Parameter - zu verstehen.

(2.1.2.1) SATZ :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1)

a) $\|\cdot\|$ sei eine monotone Norm auf X und $\|\cdot\|$ sei die davon induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$ und $\mu := \mu_{\|\cdot\|}$ sei die davon erzeugte logarithmische Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$.

b) $\Omega := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \alpha \leq \omega, \quad 0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1 \right\}$

c) Für $t \in [0, T]$, $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in \Omega$ sei im k -ten Relaxationsschritt:

$$\theta_1^{(k)}(t, \underline{\omega}) := \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [S \underline{p}^{(k-1)}(t) - \underline{g}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t))] \|,$$

$$\theta_1^{(k)}(\underline{\omega}) := \sup_{\substack{\xi \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \mu \left[(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \cdot \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\xi, \underline{p}^{(k-1)}(t), \underline{\varphi}(t)) \right].$$

d) Für den k -ten Relaxationsschritt werde das Optimierungsproblem

$$F(\chi, \underline{\omega}) := \max_{t \in [0, T]} \chi^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \rightarrow \min_{\underline{\omega}}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{\chi}^{(k)} = \theta_2^{(k)}(\underline{\omega}) \cdot \chi + \theta_1^{(k)}(t, \underline{\omega}) \quad \text{auf } [0, T],$$

$$\chi^{(k)}(0, \underline{\omega}(0)) = 0,$$

$$\underline{\omega} \in L^{\Omega} := \left\{ \underline{\omega} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2) : \forall_{t \in [0, T]} : \underline{\omega}(t) \in \Omega \right\}$$

betrachtet.

Behauptung:

Ist $\underline{\omega}^{(k)} : [0, T] \rightarrow \Omega$ Lösung des Optimierungsproblems aus Voraussetzung d), so gilt im k -ten Relaxationsschritt:

$$\max_{t \in [0, T]} \| p^{(k)}(t) - p^{(k-1)}(t) \| \leq F(\chi^{(k)}, \underline{\omega}^{(k)})$$

Beweis:

Sei $(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ gemäß Voraussetzung (1.2.3.1) h) gegeben.

Wie im Beweis zu Satz (1.2.3.3) zeigt man dann für

$t \in [0, T]$, $k \in \mathbb{N}$; $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \| \dot{\underline{p}}^{(k)}(t) - (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) \| \\ & \leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} [S \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t) - \tilde{g}(\underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t))] \| = \rho_1^{(k)}(t), \binom{\alpha}{\omega} \end{aligned}$$

Setzt man für $\underline{x} \in C^1([0, T], X)$:

$$\underline{f}(\underline{x}(t)) := (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{x}(t), \underline{p}^{(k-1)}(t), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) ,$$

so gilt mit $\underline{u} := \underline{p}^{(k)}$ und $\underline{v} := \underline{p}^{(k-1)}$ nach 1) :

$$\| \dot{\underline{u}}(t) - \underline{f}(\underline{u}(t)) \| \leq \rho_1^{(k)}(t, \binom{\alpha}{\omega}) \quad \text{für } t \in [0, T] ,$$

$$\dot{\underline{v}} - \underline{f}(\underline{v}) = 0 \quad \text{auf } [0, T] ,$$

$$\| \underline{u}(0) - \underline{v}(0) \| = \| \underline{u} - \underline{v} \| = 0 .$$

Satz (1.2.2.9) liefert dann:

$$2) \quad \forall_{t \in [0, T]} : \| \underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t) \| \leq \chi^{(k)}(t), \binom{\alpha}{\omega})$$

wobei $\chi^{(k)}(\cdot, \binom{\alpha}{\omega}) \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ Lösung des AWP

$$\dot{\chi} = M_{\|\cdot\|} [K_1, \underline{f}] \chi + \Theta_1 \left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) \quad \text{auf } [0, T]$$

$$\text{mit } \chi(0) = 0$$

ist. Wegen

$$M_{\|\cdot\|} [K_1, \underline{f}] = \Theta_2^{(k)} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) \quad [\text{vgl. Beweis zu Satz (1.2.3.3)}]$$

ist somit

$$\begin{aligned} 3) \quad \dot{\chi}^{(k)} \left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) &= \Theta_2^{(k)} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) \cdot \chi \left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) + \Theta_1 \left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) \quad \text{für } t \in [0, T] . \\ \text{und } \chi^{(k)} \left(0, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \right) &= 0 . \end{aligned}$$

Sei nun $\underline{\omega}^{(k)} : [0, T] \rightarrow \Omega$, $\underline{\omega}^{(k)} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2)$ Lösung des Optimierungsproblems d) und sei $\underline{p}^{(k)} \in C^1([0, T], X)$ Lösung des Anfangswertproblems, das durch den k-ten Relaxationsschritt des AWR-Algorithmus [vgl. Voraussetzung (1.2.3.1) g)] unter Verwendung der Relaxationsparameter $\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} := \underline{\omega}$ gestellt ist. Die Nebenbedingungen erfüllen dann 3) und man erhält mit 2):

$$\begin{aligned} \forall_{t \in [0, T]} : \quad \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\| &\leq \chi^{(k)}(t, \underline{\omega}^{(k)}) \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \chi^{(k)}(t, \underline{\omega}^{(k)}) = F(\chi^{(k)}, \underline{\omega}^{(k)}) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}^{(k)}(t) - \underline{p}^{(k-1)}(t)\| \leq F(\chi^{(k)}, \underline{\omega}^{(k)}) .$$

□

(2.1.2.2) BEMERKUNGEN :

Betrachtet man $\gamma_1(\alpha, \omega)$, $\gamma_2(\alpha, \omega)$, $\gamma_3(\alpha, \omega)$ aus Satz (1.2.3.2), Voraussetzung b), die Herleitung der Ungleichung 1) im Beweis zu Satz (1.2.3.3) und 4) im Beweis zu Satz (1.2.3.2), so erkennt man sofort:

$$\begin{aligned}
 \theta_1^{(k)}(\underline{t}, \underline{\omega}) &\leq \\
 &\leq \|Q_S^{\alpha, \omega}\|^{-1} \{ R_S^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}) - \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t})) + \underline{g}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\dot{\varphi}}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \\
 &\quad - \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}), \underline{\dot{\varphi}}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \} \| \\
 &\leq \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} R_S^{\alpha, \omega} \| \| \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}) - \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}) \| \\
 &\quad + \sup_{\substack{\underline{\eta} \in K_1 \\ \underline{t} \in [0, T]}} \| (Q_S^{\alpha, \omega})^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}), \underline{\eta}, \underline{\dot{\varphi}}(\underline{t}), \underline{\varphi}(\underline{t})) \| \\
 &\quad \cdot \| \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}) - \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}) \| \\
 &= \gamma_1(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}) - \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}) \| \\
 &\quad + \gamma_2(\alpha, \omega) \| \underline{p}^{(k-1)}(\underline{t}) - \underline{p}^{(k-2)}(\underline{t}) \| .
 \end{aligned}$$

Ferner gilt mit Lemma (1.2.2.4), Behauptung b) :

$$\theta_2^{(k)}(\underline{\omega}) \leq \gamma_3(\alpha, \omega) .$$

Man erhält also aus dem Optimierungsproblem in Voraussetzung d) durch Linearisierung und Abschätzung der logarithmischen Matrixnorm die Ungleichung 8) aus dem Beweis des zweiten Konvergenzsatzes (1.2.3.2). Die Differentialgleichung 1) aus dem Beweis

zu Satz (2.1.2.1) und somit auch $\chi(t, \binom{u}{\omega})$ regieren also die Konvergenz der zweiparametrischen Waveform Relaxation wesentlich schärfer als die dem Konvergenzsatz zugrundeliegende Differentialungleichung.

(2.1.2.3) DEFINITION und SATZ :

Voraussetzungen:

a) Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^p$, $T > 0$.

b) Für $k = 1, \dots, r$ seien

$$s_k : \mathbb{R}^q \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{\omega}, t) \mapsto s_k(\underline{\omega}, t)$$

in $\underline{\omega}$ stetige und in t stückweise stetige Funktionen und sei

$$L^1[s_1, \dots, s_k] := \\ := \{ \underline{\omega} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^q) : \forall_{t \in [0, T]} : \forall_{k=1, \dots, r} : s_k(\underline{\omega}(t), t) \leq 0 \},$$

$$\tilde{\Omega} := \{ \underline{g} \in \mathbb{R}^q : \underline{\omega} \in L^1[s_1, \dots, s_k] : \exists_{t \in [0, T]} : \underline{r} = \underline{\omega}(t) \} \subset \mathbb{R}^q,$$

$$\tilde{I} \subset L^1[s_1, \dots, s_k] \text{ kompakt (bezüglich der } L^1\text{-Norm)}$$

$$c) \quad \underline{f} : \mathbb{R}^{p+q+1} \supset \mathbb{R}^p \times \tilde{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (\underline{x}, \underline{\omega}, t) \mapsto \underline{f}(\underline{x}, \underline{\omega}, t)$$

sei mit folgenden Eigenschaften gegeben:

$$(1) \quad \forall \quad : \underline{f}(\cdot, \cdot, t) \in C(\mathbb{R}^P \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^P) \quad , \\ t \in [0, T]$$

$$(2) \quad \forall \quad : \underline{f}(\underline{x}, \underline{\omega}, \cdot) \in L^1([0, T], \mathbb{R}^P) \quad , \\ \underline{x}, \underline{\omega} \in \mathbb{R}^P \times \Omega$$

$$(3) \quad \exists \quad : \forall \quad : \|\underline{f}(\underline{\xi}, \underline{\sigma}, t) - \underline{f}(\underline{\eta}, \underline{\sigma}, t)\| \leq \\ K \in L^1([0, T], \mathbb{R}_0^+) \quad \underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^P \\ \underline{\sigma} \in \tilde{\Omega} \quad \leq K(t) \|\underline{\xi} - \underline{\eta}\| \\ t \in [0, T]$$

$$(4) \quad \exists \quad : \exists \quad : \forall \quad : \|\underline{f}(\underline{\xi}, \underline{\sigma}, t)\| < \frac{M(t)}{\Psi(\|\underline{\xi}\|)} \\ M \in L^1([0, T], \mathbb{R}_0^+) \quad \Psi \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+) \quad \underline{\xi} \in \mathbb{R}^r \\ \Psi \notin L^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+) \quad \underline{\sigma} \in \tilde{\Omega} \\ t \in [0, T]$$

$$d) \quad V := \{ \underline{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r :$$

$\underline{x}$ absolut stetig und $\underline{x} = \underline{x}(\cdot, \underline{\omega})$ ist für

$\underline{\omega} \in L^1[s_1, \dots, s_k]$ Lösung des Integralgleichungssystems

$$\underline{x}(t) = \underline{\xi}_0 + \int_0^t \underline{f}(\underline{x}(s), \underline{\omega}(s), s) ds \quad , \quad t \in [0, T] \}$$

$$e) \quad F : C([0, T], \mathbb{R}^P) \times L^1([0, T], \mathbb{R}^Q) \supset V \times L^1[s_1, \dots, s_k] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x} \quad , \quad \underline{\omega} \quad) \mapsto F(\underline{x}, \underline{\omega})$$

sei ein stetiges Funktional auf $V \times L^1[s_1, \dots, s_k]$ mit nach unten beschränkter Wertemenge, d.h.

$$\exists \quad : \quad \forall \quad : F(\underline{x}, \underline{\omega}) \geq \epsilon \\ \epsilon \in \mathbb{R} \quad \underline{x} \in V \\ \underline{\omega} \in L^1[s_1, \dots, s_k]$$

Behauptung:

Das "dynamische Optimierungsproblem mit nichtholonomen Nebenbedingungen", gegeben durch

$$F(\underline{x}, \underline{\omega}) \rightarrow \min_{\underline{\omega}}$$

mit

$$\dot{\underline{x}}(0) = \underline{\xi}_0,$$

$$\underline{\omega} \in \tilde{I},$$

hat eine Lösung $\underline{\omega}^* \in \tilde{I} \subset I[s_1, \dots, s_k]$.

Beweis:

Siehe Satz 3.2 in (36).

□

(2.1.2.4) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) und die Voraussetzungen a), b), c), d) von Satz (2.1.2.1). Ferner seien

$$I^\Omega := \{ \underline{\omega} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2) : \bigvee_{t \in [0, T]} \underline{\omega}(t) \in \Omega \} \text{ und}$$

$$\tilde{I} \subset I^\Omega.$$

Behauptung:

Das Optimierungsproblem aus Satz (2.1.2.1), Voraussetzung d) hat für jedes $\tilde{I} \subset I^\Omega$, das kompakt in $L^1([0, T], \mathbb{R}^2)$ ist, eine Lösung $\underline{\omega}^{(k)} \in \tilde{I}$, falls $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ in $\tilde{I}$ variiert.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß für das Optimierungsproblem (2.1.2.1) d) die Voraussetzungen a), b), c), d), e) von Satz (2.1.2.3) erfüllt sind.

zu Vor. (2.1.2.3) a) :

Setze $p := 1$, $q := 2$, $r := 4$, $T > 0$, $\xi_0 := 0$.

zu Vor. (2.1.2.3) b) :

Definiere für $v = 1, 2, 3, 4$:

$S_v : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right) \mapsto S_v \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right)$$

$$S_1 \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right) := -\alpha ,$$

$$S_2 \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right) := \alpha - \omega ,$$

$$S_3 \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right) := \omega_0 - \omega ,$$

$$S_4 \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} , t \right) := \omega - 1 .$$

Dann ist nach Voraussetzung (2.1.2.1) b) :

$$L^1[S_1, \dots, S_4] := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2) : \forall_{t \in [0, T]} : \forall_{v=1, \dots, 4} : \right.$$

$$S_v \left(\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} , t \right) \leq 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2) : \forall_{t \in [0, T]} : -\alpha(t) \leq 0 \text{ und } \right.$$

$$\alpha(t) - \omega(t) \leq 0 \text{ und } \omega_0 - \omega(t) \leq 0 \text{ und } \omega(t) - 1 \leq 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^2) : \forall_{t \in [0, T]} : \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \in \Omega \right\} = L^\Omega$$

Außerdem ist hier

$$\tilde{\Omega} = \Omega . \quad \square$$

zu Vor. (2.1.2.3) c) :

Setze $f : \mathbb{R} \times \Omega \times [0, T] \rightarrow$

$$(\chi, \omega, t) \rightarrow f(\chi, \omega, t) := \theta_2^{(k)}(\underline{\omega})\chi + \theta_1(t, \underline{\omega})$$

Nach Voraussetzung (1.2.3.1) g) hängen $Q_S^{\alpha, \omega}$ und $Q_G^{\alpha, \omega}(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\varphi})$ stetig von α und ω ab, also nach Satz (2.1.2.1), Voraussetzung c) auch $\theta_2^{(k)}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}\right)$ und $\theta_1^{(k)}\left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}\right)$. Ebenso hängt $\theta_1^{(k)}\left(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}\right)$ für festes $\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ stetig von $t \in [0, T]$ ab, d.h. mit $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ gilt:

$$f(\cdot, \cdot, t) \in C(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}) \quad \text{für } t \in [0, T] \quad \text{und}$$

$$f(\chi, \omega, \cdot) \in C([0, T], \mathbb{R}) \subset L([0, T], \mathbb{R}) \quad \text{für } (\chi, \underline{\omega}) \in \mathbb{R} \times \Omega .$$

Mit $K := \sup_{\underline{\omega} \in \Omega} |\theta_2^{(k)}(\underline{\omega})| < \infty$ (beachte: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kompakt)

erhält man für $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}, \underline{\omega} \in \Omega, t \in [0, T]$:

$$|f(\underline{\xi}, \underline{\omega}, t) - f(\underline{\eta}, \underline{\omega}, t)| \leq |\theta_2^{(k)}(\underline{\omega})| |\underline{\xi} - \underline{\eta}| \leq K |\underline{\xi} - \underline{\eta}| ,$$

$$K \geq 0 ,$$

$$\int_0^T |K| dt = T \cdot K < \infty , \quad \text{d.h. (3) ist erfüllt.}$$

Mit $M(t) := \sup_{\underline{\omega} \in \Omega} (|\theta_2^{(k)}(\underline{\omega})| + |\theta_1(t, \underline{\omega})|)$ für $t \in [0, T]$ und

$$\text{mit } \Psi(\tau) := \begin{cases} 1/\tau & , \quad \text{falls } \tau > 1 \\ 1 & \text{falls } \tau \leq 1 \end{cases}$$

erhält man:

$$0 \leq M(t) \leq \sup_{t \in [0, T]} M(t) < \infty \quad \text{für } t \in [0, T] ,$$

$$\int_0^T |M(t)| dt \leq T \sup_{t \in [0, T]} M(t) ,$$

$$\psi \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+) ,$$

$$\int_0^\infty \psi(t) dt = \int_0^1 1 dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{t} dt = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R) = \infty$$

$$\text{d.h. } \psi \notin L^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) ,$$

und schließlich für $\xi \in \mathbb{R}$, $\underline{\omega} \in \Omega$, $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} |f(\xi, \underline{\omega}, t)| &\leq |\phi_2^{(k)}(\underline{\omega})| |\xi| + |\phi_1^{(k)}(t, \underline{\omega})| \\ &\leq \begin{cases} |\phi_2^{(k)}(\underline{\omega})| + |\phi_1^{(k)}(t, \underline{\omega})| , & \text{falls } |\xi| \leq 1 \\ \frac{|\phi_2^{(k)}(\underline{\omega})| + |\phi_1^{(k)}(t, \underline{\omega})|}{1/|\xi|} , & \text{falls } |\xi| > 1 \end{cases} \\ &\leq \frac{M(t)}{\psi(|\xi|)} . \end{aligned}$$

Also ist auch (4) erfüllt .

□

zu Vor. (2.1.2.3) e) :

Sei V gemäß Vor (2.1.2.3) d) definiert, d.h.

$$V := \{ \chi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} :$$

χ absolut stetig und $\chi := \chi(\cdot, \underline{\omega})$ ist für $\underline{\omega} \in L^\Omega$

Lösung der Integralgleichung

$$\chi(t, \underline{\omega}(t)) = \int_0^t [O_2^{(k)}(\underline{\omega}(s)) \chi(s) + O_1(s, \underline{\omega}(s))] ds$$

dann gilt für $\chi = \chi(\cdot, \underline{\omega}) \in V$ nach [(36), Satz 2.2] :

$\chi(\cdot, \underline{\omega})$ hängt stetig von $\underline{\omega} \in L^\Omega = L^1[s_1, \dots, s_4]$ ab.¹⁾

Da hier für $(\chi, \underline{\omega}) \in \mathbb{R} \times \Omega$ $f(\chi, \underline{\omega}, \cdot) \in C([0, T], \mathbb{R})$ gilt, erhält man:

$$V = \{ \chi = \chi(\cdot, \underline{\omega}) \in C^1([0, T], \mathbb{R}) :$$

χ ist für $\underline{\omega} \in L^1[s_1, \dots, s_4]$ Lösung des AWP

$$\dot{\chi} = O_2^{(k)}(\underline{\omega}) \chi + O_1(t, \underline{\omega}) \text{ auf } [0, T] \text{ mit}$$

$$\chi(0) = \xi_0 = 0 \}$$

Wegen der Stetigkeit der Tschebyscheff-Norm $\|\cdot\|_C$ als Funktion $\|\cdot\|_C : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ und wegen

$$F(\chi, \underline{\omega}) := \max_{t \in [0, T]} \chi(t, \underline{\omega}(t)) = \|\chi(\cdot, \underline{\omega}(\cdot))\|_C$$

erhält man also die Stetigkeit von F in $\chi \in V$ und in $\underline{\omega} \in L^1[s_1, \dots, s_4]$. Ferner gilt wegen

$$\chi(t, \underline{\omega}(t)) = \left(\int_0^t O_1^{(k)}(s, \underline{\omega}(s)) e^{-\gamma(s)} ds \right) e^{\gamma(t)},$$

$$\text{wobei } \gamma(t) := \int_0^t O_2^{(k)}(\underline{\omega}(s)) ds \text{ und } t \in [0, T] \text{ ist,}$$

1) der Beweis zu Satz 2.2 in (36) nutzt Vor. (2.1.2.3) c4) und den Satz von Arzelá-Ascoli, um die Kompaktheit von $V \subset C([0, T], \mathbb{R})$ zu zeigen. Die stetige Abhängigkeit von $\underline{\omega}$ wird dann mit c1), c2) gefolgert.

und wegen $0_1^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \geq 0$ für $t \in [0, T]$:

$$F(\chi, \underline{\omega}) = \max_{t \in [0, T]} \chi(t, \underline{\omega}(t)) \geq \varepsilon =: 0 \quad . \quad \square$$

Satz (2.1.2.4) garantiert die Existenz einer Lösung des Optimierungsproblems aus Satz (2.1.2.1), Voraussetzung d), unter der Bedingung, daß $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ in einem geeigneten Kompaktum $\tilde{L} \subset L^\Omega \subset L^1([0, T], \mathbb{R})$ variiert. K. Neumann konstruiert in [(36), Abschnitt 5.5] mit Hilfe einer Diskretisierung der Bellman'schen Funktionalgleichung zu dem gegebenen dynamischen Optimierungsproblem mit nichtholomorphen Nebenbedingungen [vgl. dazu (36), Abschnitt 4.2 und Abschnitt 5.1] eine Folge $(\underline{\omega}_v)_{v \in \mathbb{N}}$ von Steuerungsfunktionen mit gleichmäßig beschränkter Totalvariation, die gegen eine Lösung des Optimierungsproblems konvergiert. Durch Anwendung des Satzes von Fréchet-Kolmogorov kann in allgemeinerer Form durch Einschränkung der Menge $L^1[s_1, \dots, s_4]$ für das Optimierungsproblem aus Satz (2.1.2.1) eine geeignete kompakte Teilmenge $\tilde{L}$ gewonnen werden:

(2.1.2.5) LEMMA :

Voraussetzungen:

Sei $L^\Omega \subset L^1([0, T], \mathbb{R})$ wie in Satz (2.1.2.1), Voraussetzung d), definiert. Sei $K \subset L^\Omega$, so daß gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^T \|\underline{\omega}(t+s) - \underline{\omega}(s)\| ds = 0 \quad \text{gleichmäßig für } \underline{\omega} \in K$$

Behauptung:

K kompakt (bezüglich der L^1 -Norm)

Beweis:

Sei $\tilde{K} \subset L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ wie folgt definiert.

$$(*) \quad \tilde{K} := \{ \underline{\omega} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : \exists \sigma \in K : \underline{\omega}|_{[0,T]} \equiv \underline{g} \text{ und } \underline{\omega}|_{(T,\infty)} \equiv 0 \}$$

Ist nun $\tilde{K}$ kompakt in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, so ist wegen $K = \tilde{K}|_{[0,T]}$ auch K kompakt in $L^1([0,T], \mathbb{R}^2)$, denn durch

$$\tilde{\underline{g}}(t) := \begin{cases} \underline{g}(t) & \text{für } t \in [0,T] \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus [0,T] \end{cases}$$

wird jedes $\underline{g} \in L^1([0,T], \mathbb{R}^2)$ zu $\tilde{\underline{g}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ fortgesetzt.

Also genügt es, die Kompaktheit von $\tilde{K}$ zu zeigen:

Da Ω kompakt ist, gilt $\kappa := \sup_{\underline{g} \in \Omega} \|\underline{g}\| < \infty$ und

da nach (*) für $\underline{\omega} \in \tilde{K}$ stets $\text{supp}(\underline{\omega}) \subset [0,T]$ ¹⁾ und für $t \in [0,T]$ stets $\underline{\omega}(t) \in \Omega$ gilt, folgt:

$$1) \quad \sup_{\underline{\omega} \in \tilde{K}} \int_{\mathbb{R}} \|\underline{\omega}(t)\| dt \leq \kappa T < \infty$$

Nach den Voraussetzungen gilt:

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \|\underline{\omega}(t+s) - \underline{\omega}(s)\| ds = 0 \text{ gleichmäßig für } \underline{\omega} \in \tilde{K}.$$

1) $\text{supp}(\underline{\omega}) := \{t \in \mathbb{R} : \underline{\omega}(t) \neq 0\}$

Schließlich gilt für $\underline{\omega} \in \tilde{K}$, $R > T > 0$:

$$\int_{|s| > R} \|\underline{\omega}(s)\| ds = \int_{|s| > R} \|0\| ds = 0$$

und somit

$$3) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|s| > R} \|\underline{\omega}(s)\| ds = 0 \quad \text{gleichmäßig für } \underline{\omega} \in \tilde{K}.$$

Nach dem Satz von Fréchet-Kolmogorov [siehe (60) p. 275] ist dann mit 1), 2), 3) $\tilde{K}$ kompakt auf $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

□

Zur numerischen Lösung des dynamischen Optimierungsproblems mit nichtholomonen Nebenbedingungen aus Satz (2.1.2.1), Voraussetzung d), ist bei Variation von $\underline{\omega}$ in einem Kompaktum $K \subset L^1[s_1, \dots, s_4]$ nach der Bellman'schen Funktionalgleichung vorzugehen. Nach [(36), Satz 4.3, Beispiel 4.3 d)] ist sie für das obige Problem wie folgt aufzustellen:

Es sei

$K \subset L^1[s_1, \dots, s_4]$ kompakt und für $t \in [0, T]$

$$K|_{[t, T]} := \{ \underline{\omega} \in L^1([t, T], \mathbb{R}^2) : \exists \underline{\kappa} \in K : \underline{\kappa}|_{[t, T]} = \underline{\omega} \}.$$

Dann ist im k-ten Relaxationsschritt durch

$$\begin{aligned} \varphi_t^* &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \varphi_t^*(\xi) := \min_{\underline{\omega} \in K|_{[t, T]}} \max_{s \in [t, T]} \chi^{(k)}(s, \underline{\omega}(s), \xi), \end{aligned}$$

wobei

$\chi^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}, \xi) \in C^1([t, T], \mathbb{R})$ Lösung des AWP's

$$(*) \quad \dot{\chi} = \theta_2^{(k)}(\underline{\omega}) \chi + \theta_1^{(k)}(s, \underline{\omega}) \quad \text{auf } [t, T] \quad \text{mit} \quad \chi(t) = \xi$$

ist,

das zu Satz (2.1.2.1), Voraussetzung d) gehörende "Bellman'sche Funktional" gegeben. Zerlegt man das Zeitintervall in J Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$ mit

$$0 =: t_1 < t_2 < \dots < t_J < t_{J+1} := T,$$

so gilt dazu die Funktionalgleichung

(2.1.2.6)

$$\varphi_{t_j}^*(\xi_j) = \min_{\underline{\omega} \in K|_{[t_j, t_{j+1}]}} \max \{ \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \chi^{(k)}(s, \underline{\omega}(s), \xi_j), \varphi_{t_{j+1}}^*(\xi_{j+1}) \}$$

wobei für $\underline{\omega} \in K|_{[t_j, t_{j+1}]}$ und $\xi_j \in \mathbb{R}$ gelte:

$\chi^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}, \xi_j) \in C^1([t_j, t_{j+1}], \mathbb{R})$ ist Lösung des AWP's

$$\dot{\chi} = \theta_2^{(k)}(\underline{\omega}) \chi + \theta_1^{(k)}(s, \underline{\omega}) \quad \text{auf } [t_j, t_{j+1}] \quad \text{mit} \quad \chi(t_j) = \xi_j$$

und

$$\xi_{j+1} := \chi^{(k)}(t_{j+1}, \underline{\omega}(t_{j+1}), \xi_j).$$

In einer "Rückwärtsrechnung" ist also zunächst sukzessive für

$j = J, J-1, \dots, 1$ zu beliebigen $\xi_j \in \mathbb{R}$ ein optimales $\underline{\omega}_j \in K|_{[t_j, t_{j+1}]}$

zu bestimmen, um dann mit $\xi_1 := 0$ [die Anfangsbedingung bei

$t = 0$ ist schließlich aus Satz (2.1.2.1) bekannt] in einer "Vorwärtsrechnung" für $j = 1, \dots, J$ sukzessive die Anfangsbedingungen $\xi_{j+1} := \chi^{(k)}(t_{j+1}, \underline{\omega}(t_{j+1}), \xi_j)$ zu bestimmen und durch Aneinandersetzen der zugehörigen optimalen $\underline{\omega}_j \in K|_{[t_j, t_{j+1}]}$,

die nun aus der Rückwärtsrechnung bekannt sind, eine optimale Parameterwahl $\underline{\omega}^{(k)} \in K$ mit $\underline{\omega}^{(k)}|_{[t_j, t_{j+1}]} \equiv \underline{\omega}_j$ zu gewinnen.
[vgl. dazu (36), Abschnitt 5.1]

Da die Abhängigkeit von $(Q_S^{\alpha, \omega})^{-1}$ von dem Relaxationsparametern α, ω und somit auch die Abhängigkeit von $\Pi_2^{(k)}(\underline{\omega})$ von $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ [vgl. Satz (2.1.2.1), Voraussetzung c)] i.a. nicht explizit verfügbar ist, muß also während der Rückwärtsrechnung die Waveform Relaxation zur punktweisen Bestimmung von $\Pi_2^{(k)}(\underline{\omega})$ mehrfach durchgeführt werden. Eine effiziente Anwendung der Bellman'schen Funktionalgleichung zur Konstruktion von optimalen Relaxationsparametern für die Waveform Relaxation ist somit i.a. nicht denkbar. Satz (2.1.2.1) und Satz (2.1.2.5) zeigen jedoch, daß im Falle der zweiparametrigen Waveform Relaxation optimale Relaxationsparameter als Funktionen auf dem Zeitintervall $[0, T]$ zu suchen sind.

2.2 Optimale Parameter α, ω aufgrund von Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Waveform Relaxation

Für jeden Zeitpunkt $t \in (0, T]$ wird in Abschnitt 2.2.1 ein Optimierungsproblem formuliert, dessen Zielfunktion die Differenz der Lösungen zweier aufeinanderfolgender Relaxationsschritte mit einer differenzierbaren Norm mißt und dessen Nebenbedingung gerade das im aktuellen Relaxationsschritt zu lösende System gewöhnlicher Differentialgleichungen angibt. Dazu können als notwendige Optimalitätskriterien die sog. Kuhn-Tucker-Bedingungen formuliert werden. Diese sind durch ein System partieller Differentialgleichungen charakterisiert, dessen Lösungen die Empfindlichkeit der durch den AWR-Algorithmus generierten Näherungslösungen in Bezug auf die Relaxationsparameter α und ω beschreibt.

In Abschnitt 2.2.2 wird dann einem Separationsansatz für die Lösungen des Systems partieller Differentialgleichungen folgend ein Anfangswertproblem für eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung hergeleitet, dessen Lösung im Falle $\alpha = \omega$ den Relaxationsparameter ω über eine eindeutig lösbare, nichtlineare algebraische Gleichung, die aus dem Separationsansatz resultiert, bestimmt. Dadurch werden für die einzelnen Relaxationsschritte Parameterfunktionen $\omega^{(k)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, die für $k \rightarrow \infty$ die Kuhn-Tucker-Bedingungen aus Abschnitt 2.2.1 erfüllen. Die für die Formulierung der oben genannten gewöhnlichen Differentialgleichungen erforderlichen Größen liefert der AWR-Algorithmus ohne wesent-

lichen zusätzlichen Rechenaufwand. Zur Steuerung der Relaxationsparameter des AWR-Algorithmus ist demnach eine zusätzliche (skalare) Differentialgleichung zu lösen, was bei der numerischen Behandlung sehr großer Systeme nur relativ geringe Zusatzkosten bedeutet.

2.2.1 Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Waveform Relaxation

Löst man ein gegebenes Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit dem AWR-Algorithmus (1.1.2.3) gemäß den Ergebnissen von Abschnitt 2.1.2 unter Verwendung von Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha &: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

als Relaxationsparameter, so erhält man eine Folge von Näherungslösungen, die Funktionen der Zeit und die (über das im k -ten Relaxationsschritt gestellte Anfangswertproblem, $k \in \mathbb{N}$) implizit definierte Funktionen des Parameterpaares $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ sind. Um dabei stetig nach der Zeit differenzierbare Näherungslösungen zu erhalten, sind die folgenden Voraussetzungen ergänzend zu den Voraussetzungen (1.2.3.1) zu erfüllen:

(2.2.1.1) VORAUSSETZUNGEN :

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) und die dortigen Bezeichnungen. Die Voraussetzungen (1.2.3.1) g), h) seien wie folgt ergänzt.

a) Auf das AWP (1.2.3.1) f) werde der AWR-Algorithmus gemäß Definition (1.1.2.3) mit $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in C^1([0, T], \Omega_\epsilon)$ angewendet, wobei

$$\Omega_\epsilon := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < \omega + \epsilon \text{ und } 0 < \omega_0 - \epsilon < \omega < \omega + \epsilon \right\}$$

für ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \ll 1$ und $\epsilon < \omega_0$,

und

$$\underline{s} \in C^1([0, T], X) \text{ mit } \underline{s}(0) = \underline{s}, \quad \dot{\underline{s}}(0) = \underline{s}'$$

als Startlösung gegeben sei.

b) Für die durch den AWR-Algorithmus zu $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\epsilon)$ erzeugte Folge von Näherungslösungen gelte:

$$\underline{p}^{(0)} \in C^1([0, T], X) \text{ mit } \underline{p}^{(0)} \equiv \underline{s},$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \underline{p}^{(k)} \in C^1([0, T] \times \Omega_\epsilon, X).$$

(2.2.1.2) BEMERKUNG :

Aus Voraussetzung (2.2.1.1) b) erhält man mit $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\epsilon)$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} \underline{p}^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}(\cdot)) \in C^1([0, T], X) & \text{mit} \\ \dot{\underline{p}}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) + \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\omega}} \underline{p}(t, \underline{\omega}(t)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\omega}(t) \right) \\ \text{für } t \in [0, T] \end{cases}$$

In Abschnitt 2.1 werden zulässige Parameterfunktionen $\underline{\omega} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gesucht, so daß für $k \in \mathbb{N}$ eine von $\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$ abhängige Ab-

schätzung des Fehlers

$$\max_{t \in [0, T]} \| \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \|$$

minimal wird. Unter den Voraussetzungen (2.2.1.1) kann nun der lokale Fehler

$$\| \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \|$$

auf seine Empfindlichkeit gegenüber dem Parameterpaar

$\underline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$ untersucht werden. Für festes $t \in (0, T]$ ist dabei durch den lokalen Fehler bei Verwendung einer stetig differenzierbaren Norm $\|\cdot\|$ auf $X = \mathbb{R}^n$ in jedem Relaxationsschritt ein in $\underline{\omega}(t) \in \Omega_\epsilon$ stetig differenzierbares Zielfunktional über der offenen und konvexen Menge Ω_ϵ gegeben. Dabei ist durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche für $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\epsilon)$ im aktuellen Relaxationsschritt gelöst werden, eine Gleichheitsrestriktion definiert. Für Lösungen derartiger endlichdimensionaler, nichtlinearer Optimierungsprobleme lassen sich durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen zu der dem Optimierungsproblem zugeordneten Lagrangefunktion notwendige Bedingungen formulieren. Man erhält

(2.2.1.3) DEFINITION und SATZ :

Voraussetzungen und Definitionen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) mit den ergänzenden Voraussetzungen (2.2.1.1). Für die durch den AWR-Algorithmus zur Startlösung $\underline{s}$ erzeugte Folgenschar

$$a) \quad P[\underline{s}, \Omega_\varepsilon] := \{ (\underline{p}^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}(\cdot)))_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1([0, T], X) : \underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\varepsilon) \}$$

sei dann das folgende "lokale Optimierungsproblem" ¹⁾ für festes $t \in (0, T]$ und $k \in \mathbb{N}$ definiert:

$$b) \quad H^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) := \frac{1}{2} \|\underline{q}^{(k)}(t, \underline{\vartheta})\|_2^2 = \frac{1}{2} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\vartheta})^T \cdot \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) \rightarrow \min_{\underline{\vartheta} \in \Omega_\varepsilon} \quad 2)$$

mit der Gleichheitsrestriktion

$$c) \quad \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) := Q_S^{\alpha, \omega} \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) - R_S^{\alpha, \omega} \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\vartheta}) \\ - \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}), \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\vartheta}), \dot{\underline{\varphi}}(t), \underline{\varphi}(t)) ,$$

wobei $\underline{\vartheta} = \underline{\omega}(t)$, $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\varepsilon)$

und $\underline{q}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) := \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\vartheta})$.

Die zugehörige "Lagrangefunktion" lautet [vgl. (1), p. 62, (33)]:

$$d) \quad l(\underline{\vartheta}, \underline{u}) := H^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) + \underline{u} \cdot \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) \quad \text{für } \underline{\vartheta} \in \Omega_\varepsilon, \underline{u} \in X$$

Die "lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen" zu b), c) lauten [vgl. (1), p. 64] :

$$e) \quad \nabla_{\underline{\vartheta}} l(\underline{\vartheta}, \underline{u}) = 0 \quad , \text{ d.h. } \frac{\partial}{\partial \underline{\vartheta}} H^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) = 0$$

$$f) \quad \nabla_{\underline{u}} l(\underline{\vartheta}, \underline{u}) = 0 \quad , \text{ d.h. } \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\vartheta}) = 0$$

1) Das Optimierungsproblem wird hier als "lokal" bezeichnet, da es für jedes $t \in (0, T]$ zu stellen ist.

2) $\|\cdot\|_2$ bezeichne die euklidische Norm auf $X = \mathbb{R}^n$.

Die "linearisierte Slater-Bedingung" zu b) c) lautet für $\underline{\theta} \in \Omega_\epsilon$
[vgl. (1), p. 63 Nr. (40)]

$$g) \quad \exists \quad : \quad \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} h^{(k)}(t, \underline{\theta}) \right] (\tilde{\underline{\theta}} - \underline{\theta}) = 0 \in X$$

$$\tilde{\underline{\theta}} \in \Omega_\epsilon$$

Behauptung: [siehe (1), p. 90]

Ist $\underline{\theta}^* \in \Omega_\epsilon$ Lösung des Optimierungsproblems b), c) und ist die
linearisierte Slater-Bedingung g) für $\underline{\theta}^*$ erfüllt, und gilt

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} h^{(k)}(t, \underline{\theta}^*) \right) \neq 0, \quad ,$$

so stellen die linearisierten Kuhn-Tuckerbedingungen e), f) ein
notwendiges Optimalitätskriterium für b), c) dar, d.h. es gilt
dann

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} H^{(k)}(t, \underline{\theta}) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\theta}) = 0$$

Beweis:

siehe Blum, Oettli [(1), 3. Kapitel, Abschnitt 5]. $\square$

Die Kuhn-Tucker-Bedingung (2.2.1.3) e) erfordert wegen

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} H^{(k)}(t, \underline{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \left(\frac{1}{2} \underline{q}(t, \underline{\theta})^T \cdot \underline{q}(t, \underline{\theta}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{q}(t, \underline{\theta})^T \cdot \underline{q}(t, \underline{\theta}) + \underline{q}(t, \underline{\theta})^T \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{q}(t, \underline{\theta}) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{q}(t, \underline{\theta}) \right)^T \cdot \underline{q}(t, \underline{\theta})$$

die Kenntnis der Änderung der Iterierten $\underline{p}^{(k)}(t, \underline{\theta})$, $k = 1, 2, \dots$, nach dem Parameterpaar $\underline{\theta} \in \Omega_{\epsilon}$. Betrachtet man nur für alle $t \in (0, T]$ die in (2.2.1.3) b), c) gestellten endlichdimensionalen Optimierungsprobleme, so lassen sich unter geeigneten Voraussetzungen die Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.2.1.3) e) f) durch Lösungen eines dem k-ten Relaxationsschritt zugeordneten Systems partieller Differentialgleichungen charakterisieren. Es gilt:

(2.2.1.4) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) ergänzt durch (2.2.1.1).

Zu gegebenem $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_{\epsilon})$ sei dann die Funktionenfolge $(\underline{p}^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}(\cdot)))_{k \in \mathbb{N}_0} \in P[\underline{\omega}, \Omega_{\epsilon}]$ und $\underline{h}^{(k)}(t, \underline{\theta})$ mit $\underline{\theta} := \underline{\omega}(t)$ für $t \in [0, T]$ gemäß Definition (2.2.1.3) a), c) betrachtet.

Es sei ferner

$$T_{\underline{\omega}} := \{ \underline{\theta} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \in \Omega_{\epsilon} : \exists t \in (0, T] : \underline{\theta} = \underline{\omega}(t) \}$$

Behauptung:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\theta}) = 0 \quad \text{auf} \quad (0, T] \times T_{\underline{\omega}} \quad \Leftrightarrow$$

$\underline{q}^{(k)} := \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}$ ist auf $(0, T] \times T_{\underline{\omega}}$ Lösung der partiellen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{q}^{(k)}}{\partial \alpha} \right) &= \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{q}^{(k)}}{\partial \alpha} \right) \\
 &+ \frac{1}{\omega} L_S \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{q}^{(k)} = \frac{1}{\omega} \tilde{L}_G (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \underline{q}^{(k)} \\
 &+ S \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} \right) = \tilde{G}^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{q}^{(k)}}{\partial \omega} \right) &= \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{q}^{(k)}}{\partial \omega} \right) \\
 &- \frac{1}{\omega} Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{q}^{(k)} + \frac{1}{\omega} \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \underline{q}^{(k)} \\
 &+ S \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) = \tilde{G}^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Beweis:

Nach Definition (2.2.1.3) c) gilt für $(t, \underline{0}) \in (0, T] \times T_{\underline{0}}$
 mit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} := \underline{0}$:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial}{\partial \underline{0}} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{0}) &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial \underline{0}} [Q_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k)}(t, \underline{0}) - \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t, \underline{0}) - \\
 &\quad - \tilde{G}^{\alpha, \omega} (\underline{p}^{(k)}(t, \underline{0}), \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{0}), \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t))]
 \end{aligned}$$

Dabei gilt mit Voraussetzung (1.2.3.1) g):

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial \underline{0}} Q_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}, \underline{0}) = \left[\frac{\partial}{\partial \underline{0}} Q_S^{\alpha, \omega} \right] \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}, \underline{0}) + Q_S^{\alpha, \omega} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{0}} \dot{\underline{p}}^{(k)}(\underline{t}, \underline{0}) \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \omega} Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k)} \right) \end{pmatrix} \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} L_S \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k)} \right) \\ - \frac{1}{\omega} Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k)} \right) \end{pmatrix} ,$$

$$3) \quad \frac{\partial}{\partial \underline{0}} R_S^{\alpha, \omega} \dot{\underline{p}}^{(k-1)} = \left[\frac{\partial}{\partial \underline{0}} R_S^{\alpha, \omega} \right] \dot{\underline{p}}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{0}} \dot{\underline{p}}^{(k-1)} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \omega} R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} L_S \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} \right) \\ - \frac{1}{\omega} Q_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \underline{p}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) \end{pmatrix}$$

1) Die Argumente $(\underline{t}, \underline{0})$ werden bei $\underline{p}^{(k)}, \dot{\underline{p}}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{p}}^{(k-1)}$ im Folgenden weggelassen, um eine übersichtliche Schreibweise zu erhalten.

wegen $\delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) = \underline{p}^{(k-1)} +$

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\omega} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\alpha}{\omega} & \\ & & & \frac{1}{\omega} \\ 0 & & & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{q}^{(k)}$$

↑
j-te Zeile u. Spalte

ist $\frac{\partial}{\partial \alpha} \delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) =$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\omega} & \\ & & & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \underline{q}^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\omega} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\alpha}{\omega} & \\ & & & \frac{1}{\omega} \\ 0 & & & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{q}^{(k)}$$

und $\frac{\partial}{\partial \omega} \delta^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) =$

$$= \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\omega^2} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -\frac{\alpha}{\omega^2} & \\ & & & -\frac{1}{\omega^2} \\ 0 & & & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{q}^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\omega} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\alpha}{\omega} & \\ & & & \frac{1}{\omega} \\ 0 & & & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}$$

[vgl. Definition (1.1.2.3)] für $j = 1, \dots, l$. Also erhält man:

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{g}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) = \\
 & = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\delta}} \tilde{g}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi})) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) \right)_{j=1(1)1} \\
 & = \tilde{G}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} + \frac{1}{\omega} \tilde{L}_G(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}) \underline{q}^{(k)} \\
 & \quad + \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{q}^{(k)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) = \\
 & = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\delta}} \underline{q}_j(\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \dot{\underline{\varphi}}, \underline{\varphi})) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) \right)_{j=1(1)1} \\
 & = \tilde{G}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} - \frac{1}{\omega} \Omega_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \underline{q}^{(k)} \\
 & \quad + \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}
 \end{aligned}$$

Aus 1), 2), 3), 4), 5) erhält man schließlich mit $\Omega_S^{\alpha, \omega} - R_S^{\alpha, \omega} = S$:

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{q}) = \\
 & = Q_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{q}^{(k)} - \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\dots) \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{q}^{(k)} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{\omega} L_S \frac{\partial}{\partial t} \underline{q}^{(k)} - \frac{1}{\omega} \tilde{L}_G^{\alpha, \omega}(\dots) \underline{q}^{(k)} \\
 & \quad + S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} - \tilde{G}^{\alpha, \omega}(\dots) \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{p}^{(k-1)} \right)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} h^{(k)}(t, \underline{0}) &= \\
 &= Q_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} q^{(k)} \right) - \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} (\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} q^{(k)} \\
 &\quad - \frac{1}{\omega} Q_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} q^{(k)} + \frac{1}{\omega} \tilde{Q}_G^{\alpha, \omega} (\dots) q^{(k)} \\
 &\quad + s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} p^{(k-1)} \right) - \tilde{G}^{\alpha, \omega} (\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} p^{(k-1)}
 \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für $(t, \underline{0}) = (t, \binom{\alpha}{\omega}) \in (0, T] \times T_{i_0}$. $\square$

(2.2.1.5) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) ergänzt durch (2.2.1.1).

$$\begin{aligned}
 a) \quad i : (\omega_0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 \omega &\mapsto i(\omega)
 \end{aligned}$$

sei stetig differenzierbar und es gelte für $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \omega_0$:

$$\forall \omega \in (\omega_0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) : \binom{\alpha(\omega)}{\omega} \in \Omega_\varepsilon$$

b) Zu $\underline{\omega} \in C^1([0, T], \Omega_\varepsilon)$ mit

$$\forall t \in [0, T] : \alpha(t) = i(\omega(t))$$

sei dann die Funktionenfolge $(p^{(k)}(\cdot, \omega(\cdot)))_{k \in \mathbb{N}} \in P[\underline{\Omega}, \Omega_{\epsilon}]$
 und $\underline{h}^{(k)}(t, \underline{\varrho})$ mit $\underline{\varrho} = \underline{\omega}(t)$ für $t \in [0, T]$ gemäß Definition
 (2.2.1.3) a), c) betrachtet und es sei

$$\Gamma := \{ \underline{\varrho} \in \Omega_{\epsilon} : \exists t \in (0, T] : \underline{\varrho} = \underline{\omega}(t) \}$$

Behauptung:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\varrho}) = 0 \quad \text{auf} \quad (0, T] \times \Gamma \quad \Rightarrow$$

$$\underline{q}^{(k)} := \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \quad \text{ist auf} \quad (0, T] \times \omega((0, T]) \quad \text{Lösung}$$

des partiellen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} Q_S^{i(\omega), \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)} \right) - \tilde{Q}_G^{i(\omega), \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)} \\ - \frac{1}{\omega} Q_S^i \frac{\partial}{\partial t} \underline{q}^{(k)} + \frac{1}{\omega} \tilde{Q}_G^i(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \underline{q}^{(k)} \\ + S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) - \tilde{G}^{i(\omega), \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} = 0 \end{aligned}$$

wobei

$$Q_S^i := \left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) L_S + \frac{1}{\omega} D_S$$

$$\tilde{Q}_G^i(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) := \left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) \tilde{L}^{i(\omega), \omega}(\dots) + \frac{1}{\omega} \tilde{D}^{i(\omega), \omega}(\dots)$$

Beweis:

$$\text{Mit} \quad \alpha = i(\omega) \quad , \quad \underline{\varrho} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\omega(t)) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \quad , \quad t \in (0, T) \quad \text{gilt:}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} Q_S^{\alpha, \omega} \underline{p}^{(k)}(t, \underline{0}) &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\left(\frac{i(\omega)}{\omega} L_S + \frac{1}{\omega} D_S \right) \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k)} \right) \right] \\
 &= - \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) L_S + \frac{1}{\omega} D_S \right] \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}^{(k)} + Q_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k)} \right)
 \end{aligned}$$

Analog erhält man mit Voraussetzung (1.2.3.1) g) :

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} R_S^{\alpha, \omega} \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{0}) &= \\
 &= - \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) L_S + \frac{1}{\omega} D_S \right] \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}^{(k-1)} + R_S^{\alpha, \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right)
 \end{aligned}$$

Dabei ist mit $i'(\omega) := \frac{\partial}{\partial \omega} i(\omega)$:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{i(\omega)}{\omega} \right) = - \frac{1}{\omega} \left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) .$$

Damit ist wegen [vgl. Beweis zu Folgerung (2.2.1.4)]

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{\hat{g}}^{i(\omega), \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{i(\omega)}{\omega} \right) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{i(\omega)}{\omega} \right) \\ & & & -\frac{1}{\omega} \\ & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{q}^{(k)} +
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{i(\omega)}{\omega} & & 0 \\ & \ddots & \\ \frac{i(\omega)}{\omega} & & \\ & & \frac{1}{\omega} \\ & & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}$$

für $j = 1, \dots, l$ mit den Bezeichnungen aus Vor. (1.2.3.1) g):

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{g}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}) &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\omega}} \underline{g}_j(\underline{\delta}^{\underline{i}(\omega), \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}), \underline{\varphi}, \underline{\varphi}), \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{\delta}^{\underline{i}(\omega), \omega, j}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}) \right)_{j=1}^{l(1)} \\ &= \widetilde{G}^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \\ &\quad - \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) \widetilde{L}_G(\dots) + \frac{1}{\omega} \widetilde{D}_G(\dots) \right] \underline{q}^{(k)} \\ &\quad + \widetilde{Q}_G^{\alpha, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)} \end{aligned}$$

Mit $\underline{Q}_S' := \left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) \underline{L}_S + \frac{1}{\omega} \underline{D}_S$ und

$$\widetilde{Q}_G'(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) := \left(\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) \right) \widetilde{L}_G(\dots) + \frac{1}{\omega} \widetilde{D}_G(\dots)$$

erhält man dann mit $\underline{Q}_S^{\alpha, \omega} - \underline{R}_S^{\alpha, \omega} = \underline{S}$ aus 1), 2), 3) :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{0}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= Q_s^{i(\omega), \omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)} \right) - \tilde{Q}_G^{i(\omega), \omega} (\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)} \\
 &- \frac{1}{\omega} Q_s' \frac{\partial}{\partial t} \underline{q}^{(k)} + \frac{1}{\omega} \tilde{Q}_G' (\dots) \underline{q}^{(k)} \\
 &+ s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)} \right) - \tilde{G}^{i(\omega), \omega} (\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)}
 \end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{\theta}) = 0$ auf $(0, T] \times_{\omega} \{(0, T]\}$ folgt dann die Behauptung.

□

(2.2.1.6) BEMERKUNGEN :

a) Für die Systeme partieller Differentialgleichungen aus Folgerung (2.2.1.4) und Folgerung (2.2.1.5) ist bei $t = 0$ wegen

$$\underline{q}^{(k)} = \underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)} \quad \text{und} \quad \underline{p}^{(k)}(0) = \underline{\sigma}, \quad \underline{p}^{(k-1)}(0) = \underline{\sigma}$$

[vgl. dazu Voraussetzung (1.2.3.1) f) und Definition (1.1.2.3)]

die Randbedingung

$$\underline{q}^{(k)}(0, \underline{\theta}) = 0$$

zu setzen.

b) Hat man eine Lösung $\underline{q}^{(k)}$ des Systems (2.2.1.4) a), b) bzw. des Systems (2.2.1.5) gefunden, so stellt die Kuhn-Tucker-Bedingung aus Definition (2.2.1.3) e), die hier in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{q}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix})^T \cdot \underline{q}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}) \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix})^T \cdot \underline{q}(t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix})$$

darzustellen ist, eine Optimalitätsbedingung für den AWR-Algorithmus dar, falls die Slater-Bedingung gemäß Satz (2.2.1.3) erfüllt ist. Nach den Folgerungen (2.2.1.4) und (2.2.1.5) gilt dabei stets

$$\frac{\partial}{\partial \underline{0}} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{0}) = 0 \quad \text{für} \quad (t, \underline{0}) \in (0, T) \times \Gamma \quad ,$$

womit auch (2.2.1.3) g) erfüllt wird, jedoch nicht

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial \underline{0}} \underline{h}^{(k)}(t, \underline{0}) \right) \neq 0 \quad .$$

Trotzdem läßt sich, wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt wird, insbesondere aufgrund von Folgerung (2.2.1.5), ein leistungsfähiger Algorithmus zur Gewinnung einer optimalen Parameterfunktion $\underline{w}$ für den AWR-Algorithmus ableiten.

c) Für den Spezialfall $\alpha = \omega$, d.h.

$$i(\omega) = \omega \quad \text{für} \quad \omega \in (\omega_0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \quad ,$$

erhält man in Folgerung (2.2.1.5)

$$\frac{i(\omega)}{\omega} - i'(\omega) = \frac{\omega}{\omega} - 1 = 0$$

und somit

$$Q'_S = \frac{1}{\omega} D_S \quad \text{und}$$

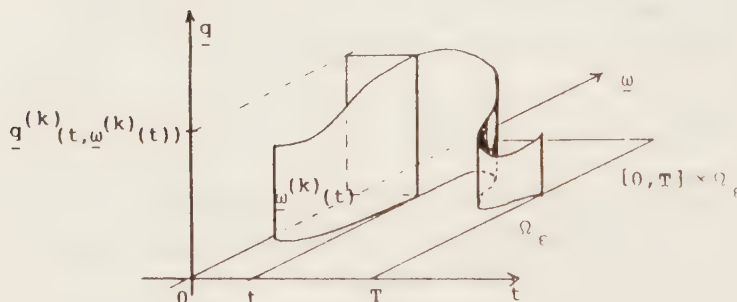
$$\tilde{Q}'_G(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) = \frac{1}{\omega} \tilde{D}_G^{\omega, \omega}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(k-1)}, \underline{\varphi}) \quad .$$

2.2.2 Ein Separationsansatz zur numerischen Bestimmung der Relaxationsparameter für $\alpha = \omega$

Sind für die Systeme partieller Differentialgleichungen aus Folgerung (2.2.1.4) a), b) bzw. aus Folgerung (2.2.1.5) Lösungen $\underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}^{(k)}(t))$, $t \in [0, T]$, mit $\underline{q}^{(k)}(0, \underline{\omega}^{(k)}(0)) = 0$ bekannt, so können diese Differentialgleichungssysteme als implizite Gleichungen für die zugehörigen Parameterfunktionen

$$\underline{\omega}^{(k)} : [0, T] \rightarrow \Omega_\epsilon$$

des k -ten Relaxationsschrittes aufgefaßt werden:



Unter der Voraussetzung $\alpha = \omega$ wird hier unter Verwendung eines Separationsansatzes für $p^{(k)}, p^{(k+1)}$ der Form

$$\underline{p}^{(\kappa)}(t, \omega) = z^{(\kappa)}(\omega) \underline{y}^{(\kappa)}(t), \quad \kappa = k, k-1,$$

ausgehend von dem System partieller Differentialgleichungen für $q^{(k)} = p^{(k)} - p^{(k-1)}$ aus Folgerung (2.2.1.5), eine gewöhnliche (skalare) Differentialgleichung hergeleitet, deren

Lösung in einfacher Weise auf die Parameterfunktion $\underline{\omega}^{(k)}$ über dem Zeitintervall $[0, T]$ führt. Durch Angabe eines geeigneten Anfangswertes ist dann ω mit $\omega(0) = 1$ eindeutig festgelegt. Es kann schließlich gezeigt werden, daß die derart für jeden Relaxationsschritt gewonnenen Parameterfunktionen $\underline{\omega}^{(k)}$ für $k \rightarrow \infty$ auf dem Intervall $[0, T]$ (punktweise) konvergieren und die Kuhn-Tucker-Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \underline{q}} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{q}) \cdot \underline{q}^{(k)}(t, \underline{q}) \quad \text{mit} \quad \underline{q} := \underline{\omega}^{(k)}(t) \quad , \quad t \in [0, T]$$

für $k \rightarrow \infty$ erfüllt wird. Die $\underline{\omega}^{(k)}$ bestimmende gewöhnliche Differentialgleichung kann dabei als eine Gleichgewichtsrelation für die in jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ durch die Energiespeicher der untersuchten Schaltung (= Kondensatoren) erfolgte Energieaufnahme (= Leistung der Kondensatoren) gedeutet werden.

(2.2.2.1) DEFINITION (Separationsansatz) :

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) mit den ergänzenden Voraussetzungen (2.2.1.1). Ferner sei

$$\omega \in C^1([0, T] , (\omega_0 - \epsilon , 1 + \epsilon))$$

beliebig gewählt und sei mit

$$\underline{\omega} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \end{pmatrix} \in C^1([0, T] , \Omega_{\epsilon})$$

die durch den AWR-Algorithmus (1.1.2.3) zur Startlösung

$\underline{s} \in C^1([0, T], X)$ erzeugte Folge von Näherungslösungen

$$(\underline{p}^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}(\cdot)))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}[\underline{s}, \Omega_\epsilon]$$

gegeben [vgl. Definition (2.2.1.3) a)]. Dann gelte für $\underline{p}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, der "Separationsansatz" :

$$\underline{p}^{(k)}(t, \omega(t)) = z^{(k)}(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \cdot \underline{y}^{(k)}(t) \quad , \quad t \in [0, T] \quad ,$$

wobei folgende Eigenschaften erfüllt seien:

a) $\omega^{(k)} \in C^1([0, T], (\omega_0 - \epsilon, 1 + \epsilon))$ mit $\omega^{(k)}(0) = 1$,

so daß für alle $t \in (0, T)$ durch $\underline{Q} := \underline{Q}(t) := \begin{pmatrix} \omega^{(k)}(t) \\ \omega^{(k)}(t) \end{pmatrix} \in \Omega_\epsilon$

das lokale Optimierungsproblem aus Definition (2.2.1.3) b), c) erfüllt ist.

b) $\underline{y}^{(k)} \in C^1([0, T], X)$ mit

$$\underline{y}^{(k)}(0) = \underline{g} \quad , \quad \dot{\underline{y}}^{(k)}(0) = \underline{g}' \quad [\text{vgl. Vor. (1.1.2.3) f)]}$$

c) $\underline{z}^{(k)} \in C^1(\Omega_\epsilon \times \Omega_\epsilon, \mathbb{R})$, so daß gilt :

$$\forall \theta \in (\omega_0 - \epsilon, 1 + \epsilon) : z(0, \theta) = 1$$

und

$$\exists : \forall : u \in C^1(\Omega_\epsilon \times \Omega_\epsilon, \mathbb{R}) \quad \theta, \tau \in (\omega_0 - \epsilon, 1 + \epsilon)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial \theta} z^{(k)}(\theta, \tau) = u(\theta, \tau) \cdot z^{(k)}(\theta, \tau) & \text{und} \\ u(\theta, \tau) < 0 & \text{für } \omega_0 - \varepsilon < \theta < \tau \quad \text{und} \\ u(\theta, \tau) = 0 & \text{für } \theta = \tau \quad \text{und} \\ u(\theta, \tau) > 0 & \text{für } \tau < \theta < 1 + \varepsilon \quad \text{und} \\ \operatorname{div} u(\theta, \tau) = 0 & \text{für } \theta = \tau \quad \text{und} \\ \frac{\partial u(\theta, \tau)}{\partial \tau} \neq 0 & . \end{array} \right.$$

(2.2.2.2) BEMERKUNGEN :

a) Der obige Separationsansatz ist durch Testrechnungen motiviert [vgl. Teil 5] .

b) Für $z^{(k)}$ gemäß (2.2.2.1) c) gilt, wie man leicht sieht :

$$\forall \tau \in (\omega_0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) : z^{(k)}(0, \tau) \geq 1$$

c) Für $\underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) := \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t))$, $t \in [0, T]$

gilt, falls $\underline{p}^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ nach dem Separationsansatz aus

(2.2.2.2) darstellbar ist :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) = \\ & - \frac{\partial}{\partial \omega} [z^{(k)}(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \underline{y}^{(k)}(t) - \underline{z}^{(k-1)}(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{y}^{(k-1)}(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \underline{z}^{(k)}(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \underline{y}^{(k)}(t) \\
 &\quad - u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{z}^{(k-1)}(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{y}^{(k-1)}(t) \\
 &= u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t))
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) &= \\
 &= u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \dot{\underline{p}}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \dot{\omega}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \dot{\omega}^{(k)}(t) \right] \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \dot{\omega}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \dot{\omega}^{(k-1)}(t) \right] \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t))
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \underline{q}^{(k)}(0, \underline{\omega}(0)) = \underline{z}^{(k)}(\omega(0), \omega^{(k)}(0)) \underline{q} - \underline{z}^{(k-1)}(\omega(0), \omega^{(k-1)}(0)) \underline{q} = 0$$

Um einen geeigneten Algorithmus zur Konstruktion einer optimalen Parameterfunktion $\underline{\omega} : [0, T] \rightarrow \Omega_c$ für den AWR-Algorithmus zu gewinnen, wird nun Folgerung (2.2.1.5) und die Bemerkungen (2.2.1.6) b), c) genutzt. Einsetzen des Separationsansatzes (2.2.2.1) für eine Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen aus Folgerung (2.2.1.5) liefert dann mit den Bemerkungen (2.2.2.2) a), b) für $t \in (0, T]$:

0 =

$$\begin{aligned}
 &= Q_S^{\omega, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) - Q_G^{\omega, \omega}(\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \right) \quad 1) \\
 &\quad - \frac{1}{(\omega(t))^2} D_S + \frac{1}{(\omega(t))^2} \widetilde{D}_G^{\omega, \omega}(\dots) \underline{q}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad + S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) - \widetilde{G}^{\omega, \omega}(\dots) \frac{\partial}{\partial \omega} \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \right) \\
 &= \{ u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) Q_S^{\omega, \omega} - \frac{1}{(\omega(t))^2} D_S \} \dot{\underline{p}}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad - \{ u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \widetilde{Q}_G^{\omega, \omega}(\dots) - \frac{1}{(\omega(t))^2} \widetilde{D}_G^{\omega, \omega}(\dots) \\
 &\quad - \{ \frac{\partial}{\partial \theta} u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \dot{\omega}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} u(\omega(t), \omega^{(k)}(t)) \dot{\omega}^{(k)}(t) \} Q_S^{\omega, \omega} \} \underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad - \{ u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) Q_S^{\omega, \omega} - \frac{1}{(\omega(t))^2} D_S \} \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad + \{ u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \widetilde{Q}_S^{\omega, \omega}(\dots) - \frac{1}{(\omega(t))^2} \widetilde{D}_G^{\omega, \omega}(\dots) \\
 &\quad - \{ \frac{\partial}{\partial \theta} u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \dot{\omega}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \dot{\omega}^{(k)}(t) \} Q_S^{\omega, \omega} \} \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \\
 &\quad + \{ u(\omega(t), \omega^{(k-1)}(t)) \{ S \dot{\underline{p}}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) - \widetilde{G}^{\omega, \omega}(\dots) \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)) \}
 \end{aligned}$$

Wählt man für ω speziell $\omega := \omega^{(k-1)}$, so erhält man hieraus wegen

$$u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) = 0 \quad \text{für } t \in (0, T]$$

1) Für (...) ist stets $(\underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}(t)), \underline{p}^{(k-1)}(t, \underline{\omega}(t)), \varphi(t))$ zu setzen, vgl. Voraussetzung (1.2.3.1) g)

und wegen

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u_{(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k-1)}(t))} \dot{\omega}^{(k-1)}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} u_{(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k-1)}(t))} \omega^{(k-1)}(t) \\ = [\operatorname{div} u_{(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k-1)}(t))}] \dot{\omega}^{(k-1)}(t) = 0$$

[siehe Definition (2.2.2.1) c)]

das Gleichungssystem

(2.2.2.3)

$$\{v(t) Q_S^{\theta, \theta} - \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} D_S\} \dot{\xi}(t) \\ - \{v(t) \tilde{Q}_G^{\theta, \theta}(\dots) - \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} \tilde{D}_G^{\theta, \theta}(\dots) - \dot{v}(t) Q_S^{\theta, \theta}\} \xi(t) \\ + \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} \{D_S \dot{\eta}(t) - \tilde{D}_G^{\theta, \theta}(\dots) \eta(t)\} = 0, \\$$

wobei für $t \in (0, T]$ definiert sei:

$$\xi(t) := \underline{p}^{(k)}(t, \begin{pmatrix} \omega^{(k-1)}(t) \\ \omega^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}),$$

$$\eta(t) := \underline{p}^{(k-1)}(t, \begin{pmatrix} \omega^{(k-1)}(t) \\ \omega^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}),$$

$$v(t) := u_{(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t))},$$

$$0 := \omega^{(k-1)}(t).$$

Für $t = 0$ ist dabei zu setzen :

$$\xi(0) = \underline{g}, \quad \eta(0) = 0,$$

$$v(0) = u_{(\omega^{(k-1)}(0), \omega^{(k)}(0))} = u(1, 1) = 0.$$

Für $t \neq 0$ ist i.a. $\underline{\xi}(t) \neq 0 \in X$. Multipliziert man nun das Gleichungssystem (2.2.2.3) von links mit $\underline{\xi}^T(t)$ für $t \in (0, T]$ so erhält man:

(2.2.2.4)

$$\begin{aligned} 0 &= \\ &= \dot{v}(t) \underline{\xi}^T(t) Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t) + v(t) \underline{\xi}^T(t) Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t) \\ &\quad - v(t) \underline{\xi}^T(t) \tilde{Q}_G^{(0,0)}(\dots) \underline{\xi}(t) \\ &\quad - \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} \underline{\xi}^T(t) [D_S(\dot{\underline{\xi}}(t) - \dot{\underline{\eta}}(t)) - \tilde{D}_G^{(0,0)}(\dots)(\underline{\xi}(t) - \underline{\eta}(t))] \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Skalarproduktes erhält man ferner:

$$\begin{aligned} (2.2.2.5) \quad \underline{\xi}^T(t) (Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t)) &= (Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t))^T \underline{\xi}(t) = \dot{\underline{\xi}}^T(t) (Q_S^{(0,0)})^T \underline{\xi}(t) \\ \Rightarrow \underline{\xi}^T(t) Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t) &= \frac{1}{2} [\underline{\xi}^T(t) Q_S^{(0,0)} \dot{\underline{\xi}}(t) + \dot{\underline{\xi}}^T(t) (Q_S^{(0,0)})^T \underline{\xi}(t)] \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$(2.2.2.6) \quad \underline{\xi}^T(t) Q_S^{(0,0)} \underline{\xi}(t) = \underline{\xi}^T(t) \frac{1}{2} [Q_S^{(0,0)} + (Q_S^{(0,0)})^T] \underline{\xi}(t).$$

Nach dem Separationsansatz (2.2.2.1) erhält man noch durch

Taylor-Entwicklung bei $\omega^{(k-2)}(t)$, $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} (2.2.2.7) \quad \underline{\eta}(t) &:= \underline{p}^{(k-1)}(t, \left(\omega^{(k-1)}(t) \right)) = z^{(k-1)}(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{y}^{(k-1)}(t) \\ &= z^{(k-1)}(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{y}(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} z^{(k-1)}(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) [\omega^{(k-1)}(t) - \omega^{(k-2)}(t)] \underline{y}^{(k-1)}(t) \\
 & + O(|\omega^{(k-1)}(t) - \omega^{(k-2)}(t)|^2) \\
 & = p^{(k-1)}(t, \left(\begin{array}{c} \omega^{(k-2)}(t) \\ \omega^{(k-2)}(t) \end{array} \right)) \\
 & + u(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-2)}(t)) z^{(k-1)}(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{y}^{(k-1)}(t) \\
 & + O(|\omega^{(k-1)}(t) - \omega^{(k-2)}(t)|^2) \\
 & = p^{(k-1)}(t, \left(\begin{array}{c} \omega^{(k-2)}(t) \\ \omega^{(k-2)}(t) \end{array} \right)) + O(|\omega^{(k-2)}(t) - \omega^{(k-1)}(t)|^2)
 \end{aligned}$$

Ist $\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t) \in (\omega_0 - \epsilon, 1)$, so kann man danach in Gleichung (2.2.2.4) $\underline{\eta}(t)$ durch $p^{(k-1)}(t, \left(\begin{array}{c} \omega^{(k-2)}(t) \\ \omega^{(k-2)}(t) \end{array} \right))$ ersetzen, ohne dabei einen wesentlichen Fehler zu erzeugen. Man erhält also aus (2.2.2.4), (2.2.2.6), (2.2.2.7) den folgenden Algorithmus zur Bestimmung geeigneter Parameterfunktionen $\underline{\omega} = \left(\begin{array}{c} \omega \\ \omega \end{array} \right) : [0, T] \rightarrow \Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ für die einzelnen Relaxationsschritte des AWR-Algorithmus:

(2.2.2.8) DEFINITION (Algorithmus zur Bestimmung von ω)

$k = 0$:

Setze $\omega^{(0)}(t) = 1$ für $t \in [0, T]$

$k = 1, 2, \dots$: (k-ter Relaxationsschritt)

- a) Berechne die Lösung $p^{(k)} \in C^1([0, T], X)$ des k-ten Relaxationsschrittes des AWR-Algorithmus gemäß Definition (1.1.2.3) mit den Parameterfunktionen $\omega^{(k-1)}$ und $\alpha^{(k-1)} \equiv \omega^{(k-1)}$.

b) Setze für $t \in [0, T]$:

$$\theta := \omega^{(k-1)}(t) ,$$

$$\underline{\xi}^{(k)}(t) := \underline{p}^{(k)}(t) := \underline{p}^{(k)}\left(t, \begin{pmatrix} \omega^{(k-1)}(t) \\ \omega^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}\right) ,$$

$$\underline{\eta}^{(k)}(t) := \underline{p}^{(k-1)}(t) := \underline{p}^{(k-1)}\left(t, \begin{pmatrix} \omega^{(k-2)}(t) \\ \omega^{(k-2)}(t) \end{pmatrix}\right) ,$$

$$\beta^{(k)}(t) := \underline{\xi}^T(t) \cdot \frac{1}{2} [Q_S^{0,0} + (Q_S^{0,\theta})^T] \cdot \underline{\xi}(t)$$

$$\gamma^{(k)}(t) := \frac{1}{2} [\underline{\xi}^T(t) \cdot Q_S^{0,0} \cdot \dot{\underline{\xi}}(t) + \dot{\underline{\xi}}^T(t) \cdot (Q_S^{0,0})^T \cdot \underline{\xi}(t)]$$

$$\delta^{(k)}(t) := \underline{\xi}^T(t) \cdot Q_G^{0,0}(\underline{\xi}(t), \underline{\eta}(t), \underline{\varphi}(t)) \cdot \underline{\xi}(t)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)}(t) := & \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} \underline{\xi}(t)^T [D_S'(\underline{\xi}(t) - \dot{\underline{\eta}}(t)) - \\ & - \tilde{D}_G^{0,0}(\underline{\xi}(t), \underline{\eta}(t), \underline{\varphi}(t)) \cdot (\underline{\xi}(t) - \underline{\eta}(t))] \end{aligned}$$

c) Löse das AWP

$$\begin{aligned} \beta^{(k)}(t) \dot{v} + [\gamma^{(k)}(t) - \delta^{(k)}(t)] v &= \varepsilon^{(k)}(t) , \quad t \in [0, T] \\ v(0) &= 0 . \end{aligned}$$

d) Berechne $\omega^{(k)}(t)$ für $t \in [0, T]$ durch Lösen der Gleichung [vgl. (2.2.2.1) c)] :

$$u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t)) = v(t) .$$

Zwei wichtige Konvergenzeigenschaften des Algorithmus (2.2.2.8) hinsichtlich des Optimierungsproblems aus Satz (2.2.1.3) liefert der folgende Satz.

(2.2.2.9) SATZ :

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (1.2.3.1) und (2.2.1.1).

a) In den einzelnen Relaxationsschritten des AWR-Algorithmus werden die Relaxationsparameter $\omega^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, als Funktionen auf $[0, T]$ gemäß Algorithmus (2.2.2.8) ermittelt und

$(\underline{p}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{p}^{(k)}(\cdot, \underline{\omega}^{(k-1)}(\cdot)))_{k \in \mathbb{N}_0} \subset P(\underline{s}, \Omega_f)$ [vgl. Definition (2.2.1.3) a)] sei die zugehörige Folge von Näherungslösungen zu den Parameterpaaren $\underline{\omega}^{(k-1)} := \begin{pmatrix} \omega^{(k-1)} \\ \omega^{(k-1)} \end{pmatrix}$.

Es gelte:

$$b) \quad \exists \quad c_0 > 0 \quad : \quad \forall \quad t \in (0, T] \quad : \quad \forall \quad k \in \mathbb{N} \quad : \quad \beta^{(k)}(t) \geq c_0$$

und

$$c) \quad \exists \quad c_1 > 0 \quad : \quad \forall \quad t \in (0, T] \quad : \quad \forall \quad k \in \mathbb{N} \quad : \quad |\gamma^{(k)}(t) - \delta^{(k)}(t)| \leq c_1$$

und

$$d) \quad \forall \quad t \in (0, T] \quad : \quad \forall \quad k \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 < c_2 := \omega_0 - \varepsilon < \omega^{(k)}(t)$$

$$e) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, 0, 1} = 0.$$

Behauptungen:

a) Die AWP's aus Definition (2.2.2.8) c) sind eindeutig lösbar.

$$b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} |\omega^{(k)}(t) - \omega^{(k-1)}(t)| = 0$$

c) Genügen zusätzlich $\underline{p}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, dem Separationsansatz aus Definition (2.2.2.1), so ist die Kuhn-Tucker-Bedingung (2.2.1.3) e) "im Limes" erfüllt, d.h.

$$\forall \quad v \quad : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{2} \|p^{(k)}(t, \underline{\omega}^{(k-1)}(t)) - p^{(k-1)}(t, \underline{\omega}^{(k-2)}(t))\|_2^2 = 0^1$$

Beweis:

zu Behauptung a) :

Nach Voraussetzung b), c) sind die Funktionen

$$f^{(k)}(v, t) := - \frac{\gamma^{(k)}(t) - \delta^{(k)}(t)}{\beta^{(k)}(t)} v + \frac{\varepsilon^{(k)}(t)}{\beta^{(k)}(t)}$$

wohldefiniert und Lipschitz-stetig in v mit der Lipschitz-konstante $\frac{c_1}{c_0}$. Also folgt Beh. a) nach dem Satz von Picard-Lindelöf [vgl. (20), p. 20, Theorem 3.2].

□

zu Behauptung b) :

Nach Voraussetzung (1.2.3.1) g), h) und Definition (2.2.2.8)

1) $\|\cdot\|_2$ bezeichne hier die euklidische Norm auf $X = \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_2$ die von $\|\cdot\|_2$ induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$

gilt mit $\underline{\vartheta} := \omega^{(k-1)}(t)$ für $t \in (0, T]$:

$$c_3 > 0 \quad : \quad \forall \quad : \quad \forall \quad : \quad \|\underline{\xi}(t)\|_2 := \|\underline{p}^{(k)}(t, \underline{\omega}^{(k-1)}(t))\| \leq c_3 \quad ,$$

$$c_4 := \sup_{\substack{\underline{x}, \underline{y} \in K_1 \\ t \in [0, T]}} \tilde{D}_G^{0,0}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\varphi}(t)) < \infty \quad .$$

Mit $c_5 := \|\mathbb{D}_S\|_2$ erhält man dann nach Voraussetzung d), e)

mit $\underline{\vartheta} := \omega^{(k-1)}(t)$ für $\underline{\vartheta} := \omega^{(k-1)}(t)$, $t \in (0, T]$:

$$|\varepsilon^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{(\omega^{(k-1)}(t))^2} \|\underline{\xi}(t)\|_2 \quad .$$

$$\cdot \{ \|\mathbb{D}_S\|(\dot{\underline{\xi}}(t) - \dot{\underline{\eta}}(t))\|_2 + \|\tilde{D}_G^{0,0}(\underline{\xi}(t), \underline{\eta}(t), \underline{\varphi}(t))(\underline{\xi}(t) - \underline{\eta}(t))\|_2 \}$$

$$\leq \frac{c_3}{c_2^2} \{ c_5 \|\dot{\underline{\xi}}(t) - \dot{\underline{\eta}}(t)\|_2 + c_4 \|\underline{\xi}(t) - \underline{\eta}(t)\|_2 \}$$

$$\leq \frac{c_3 \max\{c_4, c_5\}}{c_2^2} \left(\max_{t \in [0, T]} e^{0 \cdot t} (\|\dot{\underline{\xi}}(t) - \dot{\underline{\eta}}(t)\|_2 + 1 \cdot \|\underline{\xi}(t) - \underline{\eta}(t)\|_2) \right)$$

$$= \frac{c_3 \max\{c_4, c_5\}}{c_2^2} \|\underline{\xi} - \underline{\eta}\|_{C^1, 0, 1} \quad ;$$

[vgl. Voraussetzung (1.2.3.1) i)]

Wegen $\underline{\xi}(0) = \underline{\eta}(0) = \underline{\sigma}$ und $\dot{\underline{\xi}}(0) = \dot{\underline{\eta}}(0) = \underline{\sigma}'$ [vgl. Definition (2.2.2.8) b), Definition (1.1.2.3)] ist $\varepsilon^{(k)}(0) = 0$ und man hat:

$$1) \quad \max_{t \in [0, T]} |\varepsilon^{(k)}(t)| \leq \frac{c_3 \max\{c_4, c_5\}}{c_0} \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, 0, 1}$$

Für die Lösung $v^{(k)} \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ des AWP aus (2.2.2.8) c) gilt

$$\begin{aligned} |\dot{v}^{(k)}(t)| &\leq \frac{\gamma^{(k)}(t) - \delta^{(k)}(t)}{\beta^{(k)}(t)} |v(t)| + \left| \frac{\varepsilon^{(k)}(t)}{\beta^{(k)}(t)} \right| \\ &\leq \frac{c_1}{c_0} |v(t)| + c_6 \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, 0, 1} \quad \text{für } t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$|v^{(k)}(0)| = 0,$$

wobei

$$c_6 := \frac{c_3 \max\{c_4, c_5\}}{c_0 c_2}.$$

Nach Lemma (1.2.1.2) gilt dann:

$$2) \quad \forall_{t \in [0, T]} : |v^{(k)}(t)| \leq x^{(k)}(t),$$

wobei $x^{(k)} \in C^1([0, T], \mathbb{R}_0^+)$ mit

$$3) \quad x^{(k)}(t) = \left(e^{\frac{c_1}{c_0} t} - 1 \right) \frac{c_0 c_6}{c_1} \|\underline{p}^{(k)} - \underline{p}^{(k-1)}\|_{C^1, 0, 1}$$

Lösung des AWP's

$$\dot{x} = \frac{c_1}{c_0} x + c_6 \|p^{(k)} - p^{(k-1)}\|_{C^1, 0, 1} \quad \text{auf } (0, T] \quad \text{mit}$$

$$x(0) = 0$$

ist. Nach Voraussetzung e) folgt schließlich aus 2) und 3) :

$$\forall t \in [0, 1] : \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}(t) = 0.$$

Nach Definition (2.2.2.8) und Definition (2.2.2.1) c) folgt dann aus

$$4) \quad \lim_{k \rightarrow 0} u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}(t) = 0$$

wegen der Stetigkeit von u und wegen $u(0, \tau) = 0$ für $\tau=0$:

$$\lim_{k \rightarrow 0} |\omega^{(k-1)}(t) - \omega^{(k)}(t)| = 0.$$

□

zu Behauptung c) :

Nach dem Separationsansatz (2.2.2.1) gilt für $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k-1)} \frac{1}{2} \| \underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-2)}(t)) \|_2^2 \right| \\ &= \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k-1)} (\underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-2)}(t))) \right\} \right. \\ & \quad \cdot (\underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-2)}(t))) \left. \right| \\ &= \left| \{ u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t)) \underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \right. \\ & \quad \left. - u(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t)) \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-2)}(t)) \} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot [\underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-2)}(t))] \mid \\
 & \leq \{ |u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t))| \mid \underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) \parallel_2 \\
 & \quad + |u(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t))| \mid \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) \parallel_2 \} \cdot \\
 & \quad \cdot \parallel \underline{p}^{(k)}(t, \omega^{(k-1)}(t)) - \underline{p}^{(k-1)}(t, \omega^{(k-2)}(t)) \parallel_2 \\
 & \leq \{ |u(\omega^{(k-1)}(t), \omega^{(k)}(t))| + |u(\omega^{(k-2)}(t), \omega^{(k-1)}(t))| \} c_3 \cdot 2c_3 \\
 & = (|v^{(k)}(t)| + |v^{(k-1)}(t)|) 3c_3 + 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

wie der Beweis zu Behauptung b) zeigt.

□

Um das AWP aus (2.2.2.8) c) einer physikalischen Interpretation unterziehen zu können, wird es zunächst umformuliert. Ist

$\beta^{(k)}(t) \neq 0$ für $t \in (0, T]$, so gilt mit

$$w(t) := v(t) \cdot \beta^{(k)}(t) :$$

v ist Lösung des AWP (2.2.2.8) genau dann, wenn w Lösung des AWP

$$(2.2.2.10) \quad \dot{w} + [\tilde{\gamma}^{(k)}(t) - \delta^{(k)}(t)] \frac{1}{\beta^{(k)}(t)} w = \varepsilon^{(k)}(t) \quad , \quad t \in (0, T] ,$$

$$w(0) = 0$$

ist. Dabei gilt mit den Bezeichnungen von Definition (2.2.2.8) :

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}^{(k)}(t) &= \frac{1}{2} [\underline{\xi}^T(t) Q_S^{\theta, \theta} \dot{\underline{\xi}}(t) + \dot{\underline{\xi}}^T(t) Q_S^{\theta, \theta} \underline{\xi}(t)] \\
 &+ \frac{1}{2} \underline{\xi}^T(t) \frac{\partial}{\partial \omega(k-1)} (L_S + \frac{1}{\omega(k-1)} D_S) \underline{\xi}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} \underline{\xi}^T(t) \frac{\partial}{\partial \omega(k-1)} (L_S^T + \frac{1}{\omega(k-1)} D_S^T) \underline{\xi}(t) \\
 &= \gamma^{(k)}(t) - \frac{\dot{\omega}^{(k-1)}(t)}{(\omega(k-1)(t))^2} \underline{\xi}^T(t) \frac{1}{2} [D_S + D_S^T] \underline{\xi}(t) \\
 &= \gamma^{(k)}(t) - \tilde{\gamma}^{(k)}(t) \quad , \quad \text{mit}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}^{(k)}(t) := \frac{\dot{\omega}^{(k-1)}(t)}{(\omega(k-1)(t))^2} \underline{\xi}^T(t) \frac{1}{2} [D_S + D_S^T] \underline{\xi}(t) \quad .$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \beta^{(k)} + \gamma^{(k)} \dot{v} - \delta^{(k)} v &= \dot{v} \beta^{(k)} + v \dot{\beta}^{(k)} + (\tilde{\gamma}^{(k)} - \delta^{(k)}) v \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (v \beta^{(k)}) + (\tilde{\gamma}^{(k)} - \delta^{(k)}) \frac{1}{\beta^{(k)}} (v \beta^{(k)})
 \end{aligned}$$

gilt also (2.2.2.10). Betrachtet man nun die physikalischen Dimensionen der Größen aus der Gleichung (2.2.2.10) mit den Einheiten

V	:	Volt (Spannung)
A	:	Ampère (Stromstärke)
Sec	:	Sekunden (Zeit)
J = Vasec = Wsec	:	Joule (Energie)

so erkennt man aus der folgenden Tabelle, daß w der durch die Energiespeicher aufgenommenen Energie entspricht [vgl. hierzu auch Teil 3] .

(2.2.2.11) TABELLE :

Bezeichnung der Größe	physikalische Dimension
$\beta(k)$	$VA \text{ sec} = w \text{ sec} = J$
$\tilde{\gamma}(k)$	VA
$\delta(k)$	VA
$\varepsilon(k)$	VA
$w + \frac{\tilde{\gamma}(k) - \delta(k)}{\beta(k)} w$	$\frac{VA \text{ sec}}{\text{sec}} + \frac{VA}{VA \text{ sec}} VA \text{ sec}$

Gleichung (2.2.2.10) und somit auch Gleichung (2.2.2.8) c) beschreibt also ein "Leistungsgleichgewicht".

TEIL 3 : TRANSIENTENANALYSE VON MOS-SCHALTUNGEN MIT GLOBALEN RÜCKKOPPLUNGEN

Die Transientenanalyse von MOS-Schaltungen mit der Waveform Relaxation in der von E. Lelarsmee vorgestellten Form [GSWR- und GJWR-Algorithmus] bereitet bei Rückkopplungen große Konvergenzprobleme; sie konnte bisher nur mit dem GJWR-Algorithmus, der i.a. wesentlich langsamer konvergiert als der GSWR-Algorithmus, erfolgreich durchgeführt werden [s. (39)]. In Teil 5 wird am Beispiel des Ringoszillators gezeigt, daß auch der AWR-Algorithmus aus Teil 1 i.a. divergiert, falls sog. globale Rückkopplungen vorliegen.

Dieses Verhalten läßt sich anschaulich dadurch begründen, daß die Waveform Relaxation ein Verfahren darstellt, welches ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf dem Zeitbereich $[0, T]$ in einzelne Teilsysteme entkoppelt, die in einer durch die Partitionierung bestimmten Reihenfolge gelöst werden. Eine Analyse der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen anhand eines geeigneten Schaltungsmodells zeigt, daß durch die Anwendung der Waveform Relaxation die Kirchhoff'schen Gesetze für die Spannungen und Ströme gestört werden. Durch eine lokale Wahl von $\alpha = 0$ für den Relaxationsparameter α , welche anhand der schaltungstopologischen Charakterisierung der globalen Rückkopplung charakterisiert wird, kann der AWR-Algorithmus derart modifiziert werden, daß die Störung der Kirchhoff'schen Gesetze vermieden und die Effizienz des AWR-Algorithmus weitestmöglich erhalten wird.

3.1 Die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen

Zunächst wird ein Schaltungsmodell für MOS-Schaltungen ¹⁾ formuliert. Dabei werden vier typische zweipolige Schaltungselemente zugelassen, die nach bestimmten, für MOS-Schaltungen charakteristischen Regeln zu beliebig komplexen Schaltungen verknüpft werden können. Die Anordnung der einzelnen Elemente in einer Schaltung - sie wird als die sog. Schaltungstopologie bezeichnet - wird durch einen gerichteten Graphen beschrieben, dessen Knoten die Pole der einzelnen Schaltungselemente und dessen Kanten die einzelnen Schaltungselemente repräsentieren. In Bezug auf die Topologie von MOS-Schaltungen werden dann die Kirchhoff'schen Gesetze für die den Kanten und Knoten zuzuordnenden Spannungen und Ströme dargestellt und durch Einsetzen der charakteristischen Gleichungen für die einzelnen Schaltungselemente schließlich die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOS-Schaltungen angegeben. Die hier vorliegende Darstellung geht auf Brayton und Moser (3), (4) zurück. Darauf aufbauend wird eine Darstellung der Gleichungen für Systeme gekoppelter MOS-Schaltungen hergeleitet, wobei globale Rückkopplungen als Rückkopplungen bezüglich einer gegebenen Anordnung der einzelnen MOS-Schaltungen definiert werden.

1) MOS: metal oxide semiconductor

3.1.1 Ein MOS-Schaltungsmodell -

Schaltungselemente und Schaltungstopologie

Zur Beschreibung einer MOS-Schaltung werden hier die folgenden vier Schaltungselemente verwendet:

(3.1.1.1) TABELLE der Schaltungselemente

Schaltungselemente	Schaltungs- symbol	charakteristische Zweipol- Gleichungen
Kapazitäten i.a. nichtlinear (<u>capacity</u>)		$\underline{i}_C = C \cdot \underline{v}_C \quad \text{mit}$ $C(\underline{v}_C) = \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{vv} \end{pmatrix}$ positiv definite Diagonalmatrix
unabhängige Spannungsquellen (<u>independent</u> <u>voltage sources</u>)		$\underline{v}_{IVS} = \underline{\varphi}_{IVS}(t) \quad , \quad t \in [0, T]$
Widerstände, linear u. nicht- linear (<u>resistors</u>)		$\underline{i}_R = R^{-1}(\underline{v}_R) \underline{v}_R \quad \text{mit}$ $R(\underline{v}_R) = \begin{pmatrix} r_{11}(\underline{v}_{R,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{vv}(\underline{v}_{R,v}) \end{pmatrix}$ positiv definite Diagonalmatrix
spannungsgesteuerte Stromquellen (<u>voltage controlled</u> <u>current sources</u>)		$\underline{i}_{VCCS} = g_{VCCS}(\underline{v}_C, \underline{v}_{VCCS})$

In Tabelle (3.1.1.1) sind die Kantenströme $i_{c,j}$, $i_{R,k}$, $i_{vccs,m}$ und die zugehörigen Kantenspannungen $v_{c,j}$, $v_{R,h}$, $v_{vccs,m}$ für die Kapazitäten, die Widerstände und die Spannungs-gesteuerten Stromquellen zu entsprechenden Stromvektoren $\underline{i}_c$, $\underline{i}_R$, $\underline{i}_{vccs}$ und Spannungsvektoren $\underline{v}_c$, $\underline{v}_R$, $\underline{v}_{vccs}$ zusammengefaßt, um eine kompakte Schreibweise, die sich auf die einzelnen Elementgruppen bezieht, zu erhalten. Eine genauere Darstellung der charakteristischen Gleichungen erfolgt später.

Die oben genannten vier Gruppen von Schaltungselementen reichen aus, um MOS-Schaltungen zu beschreiben. Komplexere Schaltungselemente werden durch Ersatzschaltungen aus diesen Grundelementen repräsentiert [vgl. z.B. (48), (35)]. Eine ausführliche Übersicht über die in Schaltungsmodellen üblicherweise verwendeten Schaltungselemente findet man etwa in [(45), Abschnitt 2].

Die Topologie einer MOS-Schaltung, die aus den in Tabelle (3.1.1.1) aufgeführten Schaltungselementen besteht, wird durch einen gerichteten Graphen beschrieben:

(3.1.1.2) DEFINITION :

a) Ein Tripel $G := (N, B, \tilde{A})$ heißt "gerichteter Graph", wenn gilt:

$N := \{N_0, \dots, N_n\}$ ist endliche Menge

$B := \{b_1, \dots, b_b\} \subset \{(N_i, N_j) \in N \times N : i, j = 0, 1, \dots, n\}$

$\tilde{A} := (a_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha=0,\dots,n \\ \beta=1,\dots,b}} \in \mathbb{R}^{n,b}$ mit

$$a_{v\beta} := \begin{cases} +1, & \text{wenn } \exists i \in \{0, \dots, n\} : b_\beta = (N_i, N_v) \in B \\ -1, & \text{wenn } \exists i \in \{0, \dots, n\} : b_\beta = (N_v, N_i) \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- b) N heißt "Knotenmenge" (models),
 B heißt "Kantenmenge" (branches),
 $\tilde{A}$ heißt "Inzidenzmatrix" des Graphen G .

- c) Sei $b_\beta := (N_i, N_j) \in B$, dann heißt

N_i "Anfangsknoten" von b_β und

N_j "Endknoten" von b_β .

- d) Sei $B' \subset B$, $B' \neq \emptyset$, dann sei

$$A(B') := \{N \in N : \exists b \in B' : N \text{ ist Anfangsknoten von } b\}$$

$$E(B') := \{N \in N : \exists b \in B' : N \text{ ist Endknoten von } b\}$$

- e) Sei $B' \subset B$, $B' \neq \emptyset$ und $r \leq |B'|$, dann heißt

$$W := (N_{i_1}, b_{j_1}, N_{i_2}, b_{j_2}, \dots, N_{i_r}, b_{j_r}, N_{i_{r+1}}) \subset (N \times B')^{r \times r}$$

ein " B' -Weg" in G , wenn gilt:

$$\forall \rho \in \{1, \dots, r\} : b_{j_\rho} = (N_{i_\rho}, N_{i_{\rho+1}}) \text{ oder } b_{j_\rho} = (N_{i_{\rho+1}}, N_{i_\rho}) ;$$

Dabei heißt

N_{i_1} "Anfangsknoten von w " und

$N_{i_{r+1}}$ "Endknoten von w "

f) Der Graph $G = (N, B, \tilde{A})$ heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Knoten $N_i, N_j \in N$, mit $N_i \neq N_j$ Anfangsknoten und Endknoten eines B -Weges in G sind.

Zu einer gegebenen MOS-Schaltung erhält man dann den zugehörigen gerichteten Graphen, wenn jedem Schaltungselement [vgl. Tabelle (3.1.1.1)] der MOS-Schaltung genau eine Kante zugeordnet wird. Die die Kanten verbindenden Pole der Schaltung werden als die Knoten des Graphen identifiziert. Der Graph einer MOS-Schaltung erfüllt die folgenden Voraussetzungen:

(3.1.1.3) VORAUSSETZUNGEN :

Sei $G := (N, B, \tilde{A})$ gemäß Definition (3.1.1.2) als gerichteter Graph zu einer MOS-Schaltung gegeben mit $B := B_C \cup B_{IVS} \cup B_R \cup B_{VCCS}$ als Vereinigung paarweise disjunkter Kantenmengen, so daß gilt:

- a) B_C ist die Menge der den Kapazitäten zugeordneten Kanten,
- B_{IVS} ist die Menge der den unabhängigen Spannungsquellen zugeordnete Kantenmenge,

B_R ist die Menge der den Widerständen zugeordneten Kanten und

B_{VCCS} ist die Menge der den spannungsgesteuerten Stromquellen zugeordneten Kanten.

$$b) \quad |B_C \cup B_{IVS}| = |N| - 1 = n$$

c) Es gibt genau ein $N \in N$, so daß gilt :

$$E(B_C \cup B_{IVS}) = N \setminus \{N\} \quad \text{und}$$

$$A(B_{IVS}) = \{N\}.$$

N heißt "Referenzknoten" und es gelte o.E. $N = N_0$.

$$d) \quad N_0 \in A(B_C) \quad \text{und}$$

$$E(B_C) \cap E(B_{IVS}) = \emptyset \quad \text{und}$$

$$E(B_{IVS}) \cap (E(B_{VCCS}) \cup A(B_{VCCS})) = \emptyset \quad \text{und}$$

$$E(B_{IVS}) \cap E(B_R) = \emptyset.$$

e) Für jeden $(B_C \cup B_{IVS})$ -Weg w in G mit Anfangsknoten $N_1 \in N$ und Endknoten $N_j \in N$ gilt: $N_1 \neq N_j$.

f) G sei zusammenhängend.

Erfüllt der Graph $G = (N, B, \tilde{A})$ die Voraussetzungen (3.1.1.3), so umfaßt der Teilgraph $G_1 := (N, B_C \cup B_{IVC}, \tilde{A}_1)$ alle Knoten

von $\mathcal{G}$ und es gibt keinen geschlossenen $(\mathcal{B}_C \cup \mathcal{B}_{IVS})$ -Weg in $\mathcal{G}_1$ (also auch in $\mathcal{G}$). Ein derartiger Graph wird auch als " $\mathcal{G}$ -aufspannender Baum" bezeichnet.

Für die Inzidenzmatrix eines Graphen, der einer MOS-Schaltung zugeordnet ist, gilt:

(3.1.1.4) LEMMA und DEFINITION :

Voraussetzungen:

Gegeben sei eine MOS-Schaltung mit Elementen aus Tabelle (3.1.1.1).

$\mathcal{G} = (N, \mathcal{B}, \tilde{A})$ sei der zugehörige gerichtete Graph gemäß Definition (3.1.1.2). Es gelten die Voraussetzungen (3.1.1.3) und seien

$\mathcal{B}_C, \mathcal{B}_{IVS}, \mathcal{B}_R, \mathcal{B}_{VCCS} \neq \emptyset$ und

$$n := |N| - 1 \geq 2, \quad b := |\mathcal{B}| \geq 4, \quad b_1 := |\mathcal{B}_C \cup \mathcal{B}_{IVS}| \geq 2.$$

Behauptungen:

a) $n = b_1 \leq b$

b) Die Elemente von N und $\mathcal{B}$ lassen sich derart nummerieren, daß gilt:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_C \cup \mathcal{B}_{IVS} \cup \mathcal{B}_R \cup \mathcal{B}_{VCCS} \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{B}_C := \{b_1, \dots, b_{b_1}\},$$

$$\mathcal{B}_{IVS} := \{b_{b_1+1}, \dots, b_{b_1}\},$$

$$\mathcal{B}_R := \{b_{b_1+1}, \dots, b_{b''}\},$$

$$\mathcal{B}_{VCCS} := \{b_{b''+1}, \dots, b_b\}, \quad \text{wobei} \quad 1 \leq b' < b_1 < b'' < b$$

und

$$N = \{N_O\} \cup N_C \cup N_{IVS} \text{ mit}$$

N_O als Referenzknoten,

$$N_C := \{N_1, \dots, N_{b_1}\} = E(B_C) ,$$

$$N_{IVS} := \{N_{b_1+1}, \dots, N_{b_1}\} = E(B_{IVS})$$

c) Die Inzidenzmatrix $\tilde{A}$ hat bei Anordnung der Knoten und Kanten gemäß Behauptung b) die Form

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_C & B_{IVS} \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ \underline{a}_1 \end{array} & \begin{array}{cc} a_2^T \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} B_R \\ B_{VCCS} \end{array} & \begin{array}{c} \{N_O\} \\ N_C \\ N_{IVS} \end{array} \\ \begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{21} & I_{22} \end{array} & \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{array} & \\ \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} & & \end{array}$$

wobei mit $J := \{-1, 0, 1\}$ gilt :

$$\underline{a}_1 \in J^{b_1}, \quad \underline{a}_1 \leq 0 \text{ komponentenweise,}$$

$$\underline{a}_2 \in J^{b-b_1}$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \in J^{b_1, b_1}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \in J^{b_1, b-b_1}$$

$A_{11} \in J^{b', b'}$ mit $\text{diag}(A_{11}) > 0$ und $A_{11} - \text{diag}(A_{11}) \leq 0$
(komponentenweise),

$A_{21} \in J^{b_1 - b', b'}$

$I_{22} \in J^{b_1 - b', b_1 - b'}$ Einheitsmatrix ,

$B_{11} \in J^{b', b'' - b_1}$, $B_{11} \neq 0$ -Matrix ,

$B_{12} \in J^{b', b - b''}$, $B_{12} \neq 0$ -Matrix ,

$B_{21} \in J^{b_1 - b', b'' - b_1}$, $B_{21} \neq 0$ -Matrix

d) Es gilt

$\text{Rang}(\tilde{A}) = b_1$

$\det(A_{11}) \neq 0$, $\det(A_1) \neq 0$

e) Die Matrix $A := (A_1, A_2) \in J^{b_1, b}$ heißt "reduzierte Inzidenzmatrix".

Beweis:

Behauptung a) folgt aus Voraussetzung (3.1.1.3) b).

Behauptung b), c) folgen aus Voraussetzung (3.1.1.3) a), c), d).

Behauptung d) folgt aus Voraussetzung (3.1.1.3) e), f).

Für Beweisdetails sei auf [(3), Section 1] und [(4), Section 11] verwiesen, dort wird die Darstellung von allgemeineren Schaltungen, die MOS-Schaltungen enthalten, untersucht.

Beachte: In jeder Spalte von $\tilde{A}$ stehen genau zwei von 0 verschiedene Komponenten, nämlich eine 1 und eine -1 .

3.1.2 Die Kirchhoff'schen Gesetze für MOS-Schaltungen und die Schaltungsgleichungen

Gegeben sei ein MOS-Schaltung mit Schaltungselementen aus Tabelle (3.1.1.1) und sei $G = (N, B, \tilde{A})$ der zugehörige gerichtete Graph. Die Knoten und Kanten von G seien gemäß Lemma (3.1.1.4) angeordnet, die reduzierte Inzidenzmatrix A sei gemäß (3.1.1.4) c) gegeben. Jeder Kante $b_j \in B$ seien zwei Zustandsvariable i_j und v_j für Strom und Spannung zwischen den beiden Polen des zugehörigen Schaltungselementes aus Tabelle (3.1.1.1) zugeordnet und seien $\underline{i} := (i_j)_{j=1(1)b}$, $\underline{v} := (v_j)_{j=1(1)b}$.

Nach Brayton und Moser haben die beiden Kirchhoff'schen Gesetze für die Ströme und Spannungen einer Schaltung zu einem beliebigen Zeitpunkt hier folgende Darstellung:

(3.1.2.1) KIRCHHOFF'sche GESETZE : [siehe (4), section 12]

Sind die Vektoren $\underline{i}, \underline{v} \in \mathbb{R}^b$ gemäß der Zerlegung der Kantenmenge B zu $B = B_C \cup B_{IVS} \cup B_{VCCS}$ partitioniert, d.h.

$$\underline{i} := \begin{pmatrix} \underline{i}_C \\ \underline{i}_{NS} \\ \underline{i}_R \\ \underline{i}_{VCCS} \end{pmatrix}, \quad \underline{v} := \begin{pmatrix} \underline{v}_C \\ \underline{v}_{NS} \\ \underline{v}_R \\ \underline{v}_{VCCS} \end{pmatrix},$$

so gilt :

KCL (Kirchhoff current law) :

$$A \cdot \underline{i} = 0 \quad , \quad \text{d.h.}$$

$A_{11} \underline{i}_C$	+	$B_{11} \underline{i}_R$	+	$B_{12} \underline{i}_{VCCS}$	=	0
$A_{21} \underline{i}_C$	+	$\underline{i}_{IVS}$	+	$B_{21} \underline{i}_R$	=	0

KVL (Kirchhoff voltage law) :

$$(-A_2^T (\lambda_1^T)^{-1} , I) \underline{v} = 0 \quad , \quad \text{d.h.}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \underline{p}_C \\ \underline{p}_{IVS} \end{pmatrix} := (A_{11}^T)^{-1} \begin{pmatrix} \underline{v}_C \\ \underline{v}_{IVS} \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

b)

$A_{11}^T \underline{p}_C$	+	$A_{21}^T \underline{p}_{IVS}$	=	$\underline{v}_C$
		$\underline{p}_{IVS}$	=	$\underline{v}_{IVS}$
$B_{11}^T \underline{p}_C$	+	$B_{21}^T \underline{p}_{IVS}$	=	$\underline{v}_R$
$B_{12}^T \underline{p}_C$			=	$\underline{v}_{VCCS}$

(3.1.2.2) BEMERKUNGEN :

a) $\underline{p}_C, \underline{p}_{IVS}$ werden als "Knotenpotentiale" zu den Knoten aus $N_C \cup N_{IVS} = N \setminus \{N_0\}$ bezeichnet.

b) Genügen $\underline{i}, \underline{v} \in \mathbb{R}^b$ den Kirchhoff'schen Gesetzen, so gilt, wobei $(\cdot)$ hier das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^b$ bezeichne:

$$\underline{i} \cdot \underline{v} = 0$$

[siehe (3), Theorem 1] .

c) KCL besagt, daß die Summe aller Ströme von bzw. zu einem Knoten gleich Null ist und KVL besagt, daß die Summe aller Spannungen an Kanten, die einen geschlossenen B-Weg bilden (= Kreis, loop), ist Null.

Durch Anwendung der charakteristischen Zweipol-Gleichungen in den Kirchhoff'schen Gesetzen erhält man schließlich die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer MOS-Schaltung:

(3.1.2.1) DEFINITION

Sei $B = B_C \cup B_{NS} \cup B_R \cup B_{VCCS}$ wie in Lemma (3.1.1.4) gegeben.

Sei

$$C := \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{b'} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{b', b'} \quad \text{mit } c_j > 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, b' ,$$

$$R := \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{b''-b_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{b''-b_1, b''-b_1} \quad \text{mit } r_j > 0 \quad \text{für } j=1, \dots, b''-b_1$$

$$\varphi_{\text{IVS}} \in C^1(\mathbb{R}_O^+, D_\varphi) , D_\varphi \subset \mathbb{R}^{b-1} \text{ offen}$$

$$g_{\text{VCCS}} : \mathbb{R}^{b'} \times \mathbb{R}^{b-b''} \supset D_C \times D_{\text{VCCS}} \longrightarrow \mathbb{R}^{b-b''}$$

$$(v_C, v_{\text{VCCS}}) \mapsto g_{\text{VCCS}}(v_C, v_{\text{VCCS}})$$

stetig differenzierbar und D_C, D_{VCCS} offen

dann haben die "charakteristischen Zweipol-Gleichungen" für

$i_C, v_C, v_{\text{IVS}}, i_R, v_R, i_{\text{VCCS}}, v_{\text{VCCS}}$ [vgl. (3.1.2.1)] die Form:

$$i_C(v_C) := C \cdot \dot{v}_C$$

$$v_{\text{IVS}} = \varphi_{\text{IVS}}$$

$$i_R(v_R) := R^{-1} \cdot v_R$$

$$i_{\text{VCCS}}(v_C, v_{\text{VCCS}}) := g_{\text{VCCS}}(v_C, v_{\text{VCCS}})$$

Aus (3.1.2.1) b) und (3.1.2.3) erhält man:

$$i_C = C \cdot \dot{v}_C = CA_{11}^T \dot{p}_C + CA_{21}^T \dot{\varphi}_{\text{IVS}}$$

$$i_R = R^{-1} v_R = R^{-1} B_{11}^T p_C + R^{-1} B_{21}^T \varphi_{\text{IVS}}$$

$$i_{\text{VCCS}} = g_{\text{VCCS}}(v_C, v_{\text{VCCS}}) = g_{\text{VCCS}}(A_{11}^T p_C + A_{21}^T \varphi_{\text{IVS}}, B_{12}^T p_C)$$

Einsetzen in (3.1.2.1) a) liefert dann :

(3.1.2.4) MOS-SCHALTUNGSGLEICHUNGEN

$$\boxed{S \dot{p}_C - g(p_C, \varphi_{\text{IVS}}, \varphi_{\text{IVS}}) = 0} ,$$

wobei

$$S := A_{11} \subset A_{11}^T \in \mathbb{R}^{b', b'}$$

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{p}_C, \dot{\underline{\varphi}}_{IVS}, \underline{\varphi}_{IVS}) := & - (A_{11} C A_{21}^T) \dot{\underline{\varphi}}_{IVS} \\ & - (B_{11} R^{-1} B_{11})^T \underline{p}_C - (B_{11} R^{-1} B_{21}^T) \underline{\varphi}_{IVS} \\ & - B_{12} g_{VCCS} (A_{11}^T \underline{p}_C + A_{21}^T \underline{\varphi}_{IVS}, B_{12}^T \underline{p}_C), \end{aligned}$$

$\underline{p}_C$ Vektorfunktion der Knotenpotentiale zu N_C ,

$\underline{\varphi}_{IVS}$ Vektorfunktion der Eingangssignale zu N_{IVS} .

(3.1.2.5) BEMERKUNG :

a) Sei $S := (s_{ij})_{i,j=1(1)b'}$. Mit $A_{11} := (a_{ij})_{i,j=1(1)b'} \in \{-1, 0, 1\}^{b', b'}$ gemäß Lemma (3.1.1.4), Behauptung c) gilt dann für $i, j \in \{1, \dots, b'\}$

$$\text{wegen } S = A_{11} \subset A_{11}^T, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{b'} \end{pmatrix} :$$

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{b'} c_k a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} -c_i, & \text{falls } a_{ji} \neq 0 \text{ und } j \neq i \\ -c_j, & \text{falls } a_{ij} \neq 0 \text{ und } j \neq i \\ 0, & \text{falls } a_{ji} = a_{ij} = 0 \text{ und } j \neq i \\ \sum_{k \in K(i)} c_k, & \text{falls } j = i, \text{ wobei} \end{cases}$$

$$K(i) := \{k \in \{1, \dots, b'\} : a_{ik} \neq 0\},$$

dem nach Lemma (3.1.1.4), Behauptung c), [siehe auch Bemerkung zum Beweis] ist für $i, j, k \in \{1, \dots, b'\}$:

$$a_{jj} = 1,$$

$$a_{ij} \in \{0, -1\} \text{ für } i \neq j,$$

$$a_{jk} \neq 0 \text{ mit } k \neq j \Rightarrow a_{jk} = -1 \Rightarrow a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Man erhält also wegen $c_1, \dots, c_b, > 0$:

$$|s_{ij}| \geq \sum_{j \neq i} |s_{ij}| \quad ,$$

$$s_{ii} > 0 \quad \text{und} \quad s_{ij} \leq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad .$$

b) Ist $\varphi_{\text{IVS}}(0) = \dot{\varphi}_{\text{IVS}}(0) = 0$, so erhält man durch $\underline{p}_c(0) = 0$ und $\dot{\underline{p}}(0) = 0$ Anfangsbedingungen, die (3.1.2.4) genügen.

3.1.3 Die Schaltungsgleichungen für Systeme gekoppelter MOS-Schaltungen

Die Waveform Relaxation geht von einer Partitionierung des zu lösenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in geeignete Teilanfangswertprobleme aus. Dies ist - insbesondere bei Gleichungssystemen zur Beschreibung des Verhaltens elektronischer Schaltungen - ein aufwendiges Problem, dessen Lösung mit graphentheoretischen Mitteln versucht wird [siehe etwa (46), (44), (51)]. Hier wird jedoch gerade in der umgekehrten Reihenfolge durch Zusammensetzen von Teilschaltungen zu einer großen MOS-Schaltung in natürlicher Weise eine Partitionierung des zugehörigen Gleichungssystems erzeugt. Dieses Vorgehen ist auch in der Praxis der Schaltungssimulation häufig anwendbar. Um eine möglichst übersichtliche Darstellung zu erhalten, soll in diesem Abschnitt eine MOS-Schaltung aus nur zwei Teilschaltungen zusammengesetzt werden. Eine Datenflußrichtung wird dabei durch die Definition von Ein-

gängen und Ausgängen einer Schaltung gegeben:

(3.1.3.1) DEFINITION :

Gegeben sei eine MOS-Schaltung mit dem zugehörigen gerichteten Graphen $G = (N, B, \tilde{A})$, der die Voraussetzungen (3.1.1.3) erfüllt.

Sei $N := \{N_O\} \cup N_C \cup N_{IVS}$ mit $N_C := E(B_C)$, $N_{IVS} := E(B_{IVS})$.

Dann heißt ein Knoten $N \in N$

"Eingang" der MOS-Schaltung : $\Leftrightarrow N \in N_{IVS}$ bzw.

"Ausgang" der MOS-Schaltung : $\Leftrightarrow \exists_{b \in B_C} : b = (N_O, N)$

(3.1.3.2) LEMMA :

Voraussetzungen:

Gegeben seien zwei MOS-Schaltungen $MOS^{(1)}$ und $MOS^{(2)}$ mit Elementen aus Tabelle (3.1.1.1). Die zugehörigen Graphen $G^{(1)} := (N^{(1)}, B^{(1)}, \tilde{A}^{(1)})$ und $G^{(2)} := (N^{(2)}, B^{(2)}, \tilde{A}^{(2)})$ erfüllen die Voraussetzungen (3.1.1.3); $N^{(1)}, B^{(1)}, \tilde{A}^{(1)}$ und $N^{(2)}, B^{(2)}, \tilde{A}^{(2)}$ seien gemäß Lemma (3.1.1.4) definiert. Es gelte ferner:

- a) $N^{(1)} \cap N^{(2)} = \{N_O\}$ und $B^{(1)} \cap B^{(2)} = \emptyset$
- b) $J^{(1)} \subset N_{IVS}^{(1)}$, $O^{(1)} \subset \{N \in N_C^{(1)} : (N_O, N) \in B_C^{(1)}\}$
 $J^{(2)} \subset N_{IVS}^{(2)}$, $O^{(2)} \subset \{N \in N_C^{(2)} : (N_O, N) \in B_C^{(2)}\}$

seien nichtleere Knotenmengen mit

$$|J^{(2)}| = |O^{(1)}|, \quad |J^{(1)}| = |O^{(2)}|.$$

c) $\tilde{B}_{NS}^{(j)} := \{b \in B_{NS}^{(j)} : E(\{b\}) \subset J^{(j)}\} \quad \text{für } j=1,2$

d) Die reduzierten Inzidenzmatrizen $A^{(j)}$ ($j=1,2$) vom $MOS^{(1)}$ und $MOS^{(2)}$ haben gemäß Lemma (3.1.1.4) die Form

$$A^{(j)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & B_{IVS}^{(1)} & & & \\ B_C^{(j)} & \tilde{B}_{IVS}^{(j)} & \tilde{B}_{IVS}^{(j)} & B_R^{(j)} & B_{VCCS}^{(j)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} A_{11}^{(j)} & 0 & 0 & B_{11}^{(j)} & B_{12}^{(j)} \\ \hline & 0 & 0 & & \\ A_{21}'^{(j)} & I_{22}^{(j)} & 0 & B_{21}'^{(j)} & 0 \\ \hline A_{21}''^{(j)} & 0 & I_{22}^{(j)} & B_{21}''^{(j)} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} N_C^{(j)} \setminus O^{(j)} \\ O^{(j)} \\ N_{IVS}^{(j)} \setminus J^{(j)} \\ J^{(j)} \end{array} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_1^{(j)}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_2^{(j)}}$

e) Die aus $MOS^{(1)}$, $MOS^{(2)}$ zusammengesetzte Schaltung $MOS^{(1,2)}$ sei gegeben durch den Graphen $G^{(1,2)} := (N^{(1,2)}, B^{(1,2)}, \tilde{A}^{(1,2)})$,

wobei

$$N^{(1,2)} := [(N^{(1)} \setminus J^{(1)}) \cup O^{(2)}] \cup [(N^{(2)} \setminus J^{(2)}) \cup O^{(1)}]$$

$$= (N^{(1)} \setminus J^{(1)}) \cup (N^{(2)} \setminus J^{(2)}),$$

$$B^{(1,2)} := (B^{(1)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(1)}) \cup (B^{(2)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(2)}).$$

1) Den Indizes entsprechende Kantenmenge
2) Den Indizes entsprechende Knotenmenge

Behauptung:

- a) $\mathbf{G}^{(1,2)}$ erfüllt die Voraussetzungen (3.1.1.3)
- b) Die reduzierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^{(1,2)}$ von $\mathbf{G}^{(1,2)}$ hat die Form:

$B_C^{(1,2)}$		$B_{IVS}^{(1,2)}$		$B_R^{(1,2)}$		$B_{VCCS}^{(1,2)}$		
$B_C^{(1)}$	$B_C^{(2)}$	$B_{IVS}^{(1)} \setminus B_{NS}^{(2)}$	$B_{NS}^{(1)} \setminus B_{IVS}^{(2)}$	$B_R^{(1)}$	$B_R^{(2)}$	$B_{VCCS}^{(1)}$	$B_{VCCS}^{(2)}$	
$A_{11}^{(1)}$	0	0	0	$B_{11}^{(1)}$	0	$B_{12}^{(1)}$	0	$N^{(1)} \setminus O^{(1)}$
	$A_{21}^{(2)}$				$B_{12}^{(2)}$			$O^{(1)}$
0	$A_{11}^{(2)}$	0	0	0	$B_{11}^{(2)}$	0	$B_{12}^{(1)}$	$N_C^{(2)} \setminus O^{(2)}$
$A_{21}^{(1)}$				$B_{21}^{(1)}$				$O^{(2)}$
$A_{21}^{(1)}$	0	$I_{22}^{(1)}$	0	$B_{21}^{(1)}$	0	0	0	$N_{NS}^{(1)} \setminus J^{(1)}$
0	$A_{21}^{(2)}$	0	$I_{22}^{(2)}$	0	$B_{21}^{(2)}$	0	0	$N_{NS}^{(1)} \setminus J^{(2)}$
$A_1^{(1,2)}$				$A_2^{(1,2)}$				

Beweis:

Behauptung a) folgt sofort mit

$$B_C^{(1,2)} = B_C^{(1)} \cup B_C^{(2)} ,$$

$$B_{IVS}^{(1,2)} = (B_{IVS}^{(1)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(1)}) \cup (B_{IVS}^{(2)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(2)}) ,$$

$$B_R^{(1,2)} = B_R^{(1)} \cup B_R^{(2)} ,$$

$$B_{VCCS}^{(1,2)} = B_{VCCS}^{(1)} \cup B_{VCCS}^{(2)} ,$$

da $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ Voraussetzung (3.1.1.3) erfüllen. $\square$

Behauptung b) ist klar nach Lemma (3.1.1.4) . $\square$

Mit Lemma (3.1.3.2) lassen sich dann gemäß (3.1.2.1) die Kirchhoff'schen Gesetze für das zusammengesetzte Schaltungssystem $MOS^{(1,2)}$ formulieren und man erhält analog zu (3.1.2.4) mit Hilfe der Zweipol-Charakteristiken für die Teilschaltungen $MOS^{(1)}$, $MOS^{(2)}$ die Schaltungsgleichungen zu $MOS^{(1,2)}$.

3.2 Das Verhalten der Waveform Relaxation bei der Lösung von MOS-Schaltungen mit globalen Rückkopplungen

Eine heuristische Betrachtung des AWR-Algorithmus führt zunächst auf eine Interpretation der Komponenten der Näherungslösung $\underline{p}^{(k)}$ des k-ten Relaxationsschrittes als Eingangsvariable bzw. Ausgangsvariable der einzelnen Teilsysteme in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Partitionierung des gegebenen Gleichungssystems. Diese Interpretation braucht nicht mit der in Abschnitt 3.1.3 anhand der Schaltungstopologie definierten Eingänge und Ausgänge der durch das Gleichungssystem $S \cdot \dot{\underline{p}}_C - \underline{g}(\underline{p}_C, \dot{\underline{\psi}}_{IVS}, \underline{\psi}_{IVS})$ für eine zusammengesetzte MOS-Schaltung übereinzustimmen.

In Abschnitt 3.2.2 wird bewiesen, daß der AWR-Algorithmus und insbesondere die Gauss-Seidel Waveform Relaxation nach E. Lelarsmee im Falle globaler Rückkopplungen die simultane Erfüllung der beiden Kirchhoff'schen Gesetze für die Spannungen und Ströme einer MOS-Schaltung nicht gewährleistet. Diesem Umstand kann durch eine geeignete lokale Wahl von $\alpha = 0$ im AWR-Algorithmus auf einfache Weise abgeholfen werden.

3.2.1 Eine heuristische Betrachtung der Kopplungs-Eigenschaften der Waveform Relaxation

Liegt das lineare Anfangswertproblem

$$S \cdot \dot{\underline{p}} = G \underline{p} + \underline{b}(t) \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad \underline{p}(0) = \underline{a}$$

in der durch $S = (S_{ij})_{i,j=1(1)l}$, $G = (G_{ij})_{i,j=1(1)l}$,

$\underline{p} = (p_j)_{j=1(1)l}$, $\underline{b} = (b_j)_{j=1(1)l}$, $\underline{\sigma} = (\sigma_j)_{j=1(1)l}$ gegebenen

Partitionierung gemäß $X = \prod_{j=1}^l X_j$ vor, so sind im k-ten Relaxations-schritt bei Anwendung des AWR-Algorithmus (1.1.2.3) für

$j = 1, \dots, l$ die folgenden AWP's zu lösen:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\omega} \cdot \sum_{i < j} s_{ji} \dot{\underline{p}}_i^{(k)} \\ & + \frac{1}{\omega} s_{jj} \dot{\underline{p}}_j^{(k)} \\ & - \left\{ - \left(1 - \frac{\alpha}{\omega}\right) \sum_{i < j} s_{ji} \dot{\underline{p}}_i^{(k-1)} + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) s_{jj} \dot{\underline{p}}_j^{(k-1)} - \sum_{i > j} s_{ji} \dot{\underline{p}}_i^{(k-1)} \right\} = \\ & = \frac{\alpha}{\omega} \sum_{i < j} G_{ji} \underline{p}_i^{(k)} \\ & + \frac{1}{\omega} G_{jj} \underline{p}_j^{(k)} \\ & - \left\{ - \left(1 - \frac{\alpha}{\omega}\right) \sum_{i < j} G_{ji} \underline{p}_i^{(k-1)} + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) G_{jj} \underline{p}_j^{(k-1)} - \sum_{i > j} G_{ji} \underline{p}_i^{(k-1)} \right\} \\ & + b_j(t) \text{ auf } [0, T] \text{ mit } \underline{p}_j^{(k)}(0) = \sigma_j \end{aligned}$$

Hier können nun $\underline{p}_1^{(k)}, \dots, \underline{p}_{j-1}^{(k)}$ als "Eingangsvariable" und $\underline{p}_j^{(k)}$ als "Ausgangsvariable" des j-ten Teilsystems interpretiert werden, da $\underline{p}_1^{(k)}, \dots, \underline{p}_{(j-1)}^{(k)}$ vor der Berechnung von $\underline{p}_j^{(k)}$ bekannt sein müssen. Bei Rückkopplung vom j-ten Teilsystem zum i-ten Teilsystem ($i < j$) ist jedoch $\underline{p}_j^{(k)}$ als "Eingangsvariable" für das i-te Teilsystem zu betrachten, was der durch die Waveform Relaxation nahegelegten E/A-Interpretation widerspricht.

Anhand der Schaltungstopologie wird diese Beobachtung nun näher analysiert.

3.2.2 Die Störung der Kirchhoff'schen Gesetze durch die Waveform Relaxation und ihre Korrektur

Zur Untersuchung des Ablaufes der Waveform Relaxation im Zusammenhang mit der Schaltungstopologie der dem zu lösendem Anfangswertproblem zugrundeliegenden MOS-Schaltungssystem kann man nach Lemma (3.1.1.4) und Lemma (3.1.3.2) von den folgenden Voraussetzungen ausgehen:

(3.2.2.1) VORAUSSETZUNGEN :

a) Gegeben seien $1 < l$ MOS-Schaltungen $MOS^{(1)}, \dots, MOS^{(l)}$ mit Elementen aus Tabelle (3.1.1.1). Die zugehörigen Graphen $G^{(1)} := (N^{(1)}, B^{(1)}, \tilde{A}^{(1)}), \dots, G^{(l)} := (N^{(l)}, B^{(l)}, \tilde{A}^{(l)})$ erfüllen die Voraussetzungen (3.1.1.3) und $N^{(j)}, B^{(j)}, \tilde{A}^{(j)}$ ($j=1, \dots, l$) seien gemäß Lemma (3.1.1.4) definiert.

Es gelte ferner:

$$b) \bigcup_{j=1}^l N^{(j)} = \{N_O\} \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^l B^{(j)} = \emptyset,$$

$$N^{(j)} = \{N_O\} \cup N_C^{(j)} \cup N_{IVS}^{(j)},$$

$$B^{(j)} = B_C^{(j)} \cup B_{IVS}^{(j)} \cup B_R^{(j)} \cup B_{VCCS}^{(j)} \quad \text{mit} \quad |B_C^{(j)}| = |N_C^{(j)}|$$

$$J^{(j)} \subset N_{IVS}^{(j)}, \quad J^{(j)} \neq \emptyset,$$

$$\tilde{B}_{IVS}^{(j)} := \{b \in B^{(j)} : \mathbb{E}(\{b\}) \subset J^{(j)}\} \quad \text{mit}$$

$$|B_{IVS}^{(j)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(j)}| = |N_{IVS}^{(j)} \setminus J^{(j)}|.$$

c) Die zusammengesetzte MOS-Schaltung $MOS^{(1, \dots, l)}$ habe den zugehörigen Graphen $G^{(1, \dots, l)} := (N^{(1, \dots, l)}, B^{(1, \dots, l)}, \tilde{A}^{(1, \dots, l)})$ mit

$$N^{(1, \dots, l)} := \bigcup_{j=1}^l (N^{(j)} \setminus J^{(j)}) = (N_O) \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^l N_C^{(j)}}_{N_C^{(1, \dots, l)}} \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^l (N_{IVS}^{(j)} \setminus J^{(j)})}_{=: N_{IVS}^{(1, \dots, l)}},$$

$$B^{(1, \dots, l)} := \bigcup_{j=1}^l (B^{(j)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(j)}) =$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\bigcup_{j=1}^l B_C^{(j)}}_{=: B_C^{(1, \dots, l)}} \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^l (B_{IVS}^{(j)} \setminus \tilde{B}_{IVS}^{(j)})}_{=: B_{IVS}^{(1, \dots, l)}} \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^l B_R^{(j)}}_{=: B_R^{(1, \dots, l)}} \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^l B_{VCCS}^{(j)}}_{=: B_{VCCS}^{(1, \dots, l)}} \end{aligned}$$

die reduzierte Inzidenzmatrix $A := A^{(1, \dots, l)}$ von $G^{(1, \dots, l)}$ hat die Form:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & I_{22} & B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} N_C^{(1, \dots, l)} \\ N_{IVS}^{(1, \dots, l)} \\ \hline \text{Knotenindizes} \end{array}$$

$B_C^{(1, \dots, l)}$	$B_{IVS}^{(1, \dots, l)}$	$B_R^{(1, \dots, l)}$	$B_{VCCS}^{(1, \dots, l)}$
-----------------------	---------------------------	-----------------------	----------------------------

Kantenindizes

wobei

$$A_{11} := (A_{11}^{(ij)})_{i,j=1(1)1} \in J^{n,n} \text{ mit } A_{11}^{(ij)} \in J^{n_i, n_j}$$

$$A_{21} := \begin{pmatrix} A_{21}^{(11)} & 0 \\ & \\ 0 & A_{21}^{(11)} \end{pmatrix} \in J^{m,m} \text{ mit } A_{21}^{(jj)} \in J^{m_j, m_j} ,$$

$$I_{22} \in J^{m,m} \text{ Einheitsmatrix ,}$$

$$B_{11} := (B_{11}^{(ij)})_{i,j=1(1)1} \in J^{n,r} \text{ mit } B_{11}^{(ij)} \in J^{n_i, r_j}$$

$$B_{12} := \begin{pmatrix} B_{12}^{(11)} & 0 \\ & \\ 0 & B_{12}^{(11)} \end{pmatrix} \in J^{n,s} \text{ mit } B_{12}^{(jj)} \in J^{n_j, s_j} ,$$

$$B_{21} := \begin{pmatrix} B_{21}^{(11)} & 0 \\ & \\ 0 & B_{21}^{(11)} \end{pmatrix} \in J^{m,r} \text{ mit } B_{21}^{(jj)} \in J^{m_j, r_j} ,$$

$$J := \{-1, 0, +1\} ,$$

$$n := |B_C^{(1, \dots, 1)}| , \quad n_j := |B_C^{(j)}|$$

$$m := |B_{IVS}^{(1, \dots, 1)}| , \quad m_j := |B_{IVS}^{(j)} \setminus B_{IVS}^{(j)}| ,$$

$$r := |B_R^{(1, \dots, 1)}| , \quad r_j := |B_R^{(j)}| ,$$

$$s := |B_{VCCS}^{(1, \dots, 1)}| , \quad s_j := |B_{VCCS}^{(j)}| .$$

d) Bezeichnung der Knoten und Kanten wie folgt:

$$N^{(1, \dots, 1)} := \{N_{k_j}^{(j)} : j = 1, \dots, 1, k_j := 1, \dots, n_j + m_j\} \cup N_O$$

$$N^{(j)} \setminus_Y^{(j)} := \{N_{k_j}^{(i)} : k_j = 1, \dots, n_j + m_j\} \cup \{N_O\} \quad \text{für } j = 1, \dots, 1,$$

$$B^{(1, \dots, 1)} := \{b_{k_j}^{(j)} : j = 1, \dots, 1, k_j := 1, \dots, n_j + m_j + r_j + s_j\},$$

$$B^{(j)} \setminus_{\tilde{B}_{IVS}}^{(j)} := \{b_{k_j}^{(j)} : k_j = 1, \dots, n_j + m_j + r_j + s_j\} \quad \text{für } j = 1, \dots, 1.$$

(3.2.2.2) BEMERKUNG

Wegen $\bigcap_{j=1}^1 B^{(j)} = \emptyset$ gilt in (3.2.2.1) c) :

$$n = \sum_{j=1}^1 n_j, \quad m = \sum_{j=1}^1 m_j, \quad r = \sum_{j=1}^1 r_j, \quad s = \sum_{j=1}^1 s_j.$$

Anhand der Blockstruktur von A_{11} und B_{11} lassen sich nun globale Kopplungen in der Schaltung $MOS^{(1, \dots, 1)}$ bezüglich ihrer Teilschaltungen definieren:

(3.2.2.3) DEFINITION :

Gegeben sei eine zusammengesetzte MOS-Schaltung $MOS^{(1, \dots, 1)}$ gemäß Voraussetzung (3.2.2.1). Es seien $i, j, k \in \{1, \dots, 1\}$ mit $j < i < k$.

a) $MOS^{(1, \dots, 1)}$ enthält eine "globale kapazitive (bzw.

resistive) Rückkopplung" von der i -ten Teilschaltung $MOS^{(i)}$ zur j -ten Teilschaltung $MOS^{(j)}$, wenn $A_{11}^{(ij)} \neq 0$ (bzw. $B_{11}^{(ij)} \neq 0$) ist.

b) $MOS^{(1, \dots, l)}$ enthält eine "globale kapazitive (bzw. resistive) Vorwärtskopplung" von der i -ten Teilschaltung $MOS^{(i)}$ zur k -ten Teilschaltung $MOS^{(k)}$, wenn $A^{(ik)} \neq 0$ (bzw. $B_{11}^{(ik)} \neq 0$) ist.

Für die weiteren Überlegungen benötigt man noch folgende Verallgemeinerung der Entkopplungsfunktion $\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}$ aus Definition (1.1.2.3) :

(3.2.2.4) DEFINITION :

Seien $n, n_1, \dots, n_l$ gemäß (3.2.2.1) c) gegeben und sei $X := \mathbb{R}^n$ zerlegt zu $X = \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$.

Ferner sei $0 < \omega_0 < 1$ und für $j = 1, \dots, l$

$$V_j := \begin{pmatrix} \alpha_1^{(j)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{n_j}^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j, n_j}, \quad W_j := \begin{pmatrix} \omega_1^{(j)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{n_j}^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j, n_j},$$

wobei $0 \leq \alpha_1^{(j)} \leq \omega_1^{(j)}$ und $\omega_0 \leq \omega_{n_j}^{(j)} \leq 1$ für $j = 1, \dots, l$.

Für $\underline{\xi} := (\xi_j)_{j=1(1)l}$, $\underline{\eta} := (\eta_j)_{j=1(1)l} \in X$ mit $\xi_j, \eta_j \in X_j$

sei dann die "komponentenweise verallgemeinerte Entkopplungs-

funktion" definiert durch :

1)

$$\underline{\delta}^{(i)}[v_1, \dots, v_{i-1}, w_1, \dots, w_i](\underline{\xi}, \underline{\eta}) :=$$

$$\begin{pmatrix} (I_{11}^{(11)} - v_1 w_1^{-1}) \underline{\eta}_1 + v_1 w_1^{-1} \underline{\xi}_1 \\ \\ (I_{11}^{(i-1, i-1)} - v_{i-1} w_{i-1}^{-1}) \underline{\eta}_{i-1} + v_{i-1} w_{i-1}^{-1} \underline{\xi}_{i-1} \\ \\ (I_{11}^{(i, i)} - w_i^{-1}) \underline{\eta}_i + w_i^{-1} \underline{\xi}_i \\ \underline{\eta}_{i+1} \\ \vdots \\ \underline{\eta}_1 \end{pmatrix}$$

Die Wirkung der Entkopplungsfunktion auf das Kirchhoff'sche Gesetz KVL für die Spannungen charakterisiert nun der folgende Satz:

(3.2.2.5) SATZ :

Voraussetzungen:

a) Es sei eine zusammengesetzte MOS-Schaltung $MOS^{(1, \dots, l)}$ und ihre reduzierte Inzidenzmatrix A gemäß Voraussetzung (3.2.2.1) mit den dortigen Bezeichnungen gegeben.

b) Sei $\underline{\delta}^{(i)}[..]$ für ein $i \in \{1, \dots, l\}$ gemäß Definition (3.2.2.4) gegeben.

1) $I_{11}^{(i, i)}$ bezeichne die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n_1, n_1}$, $i = 1, \dots, l$

c) Sei $X := \prod_{j=1}^l X_j$ mit $X := \mathbb{R}^n$, $X_j := \mathbb{R}^{n_j}$ und seien $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in X$. Ferner sei $\underline{\varphi} \in \mathbb{R}^m$.

d) Seien $u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^{n+m+r+s}$ gegeben durch

$$\underline{u} := A^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\varphi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix}, \quad \underline{v} := A^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{\varphi} \\ \underline{\xi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u} := A^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta}^{(i)} [v_1, \dots, v_{i-1}, w_1, \dots, w_1] (\underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ \underline{\varphi} \end{pmatrix}$$

e) Sei $k, j \in \{1, \dots, l\}$ mit $k < j \leq i$ und gelte für die Teilmatrizen $A_{11}^{(v\mu)}$ von A_{11} und $B^{(v\mu)}$ von B_{11} gelte:

$$A_{11}^{(v\mu)} \begin{cases} = 0 & \text{für } v > \mu \wedge (v+j \leq \mu+k) \\ \neq 0 & \text{für } v > \mu \wedge (v=j \wedge \mu=k) \end{cases} \quad \text{und}$$

$$B_0^{(v\mu)} = 0 \quad \text{für } v > \mu$$

Dabei sei $A_{11}^{(v\mu)} := (a_{11}^{(v\mu)}(\tilde{v}, \tilde{\mu}))_{\substack{\tilde{v}=1(1)n_v \\ \tilde{\mu}=1(1)n_\mu}}$ mit $a_{11}^{(v\mu)}(\tilde{v}, \tilde{\mu}) \in J$.

f) Es existiert eine Vorwärtskopplung ausgehend von der k -ten Teilschaltung $MOS^{(k)}$.

Behauptung:

Setzt man für $\tilde{k} \in \{1, \dots, n_k\}$

$$a_{\tilde{k}}^{(k)} = 0 \quad , \quad \text{wenn} \quad \exists \quad \tilde{j} \in \{1, \dots, n_j\} : a_{11}^{(jk)}(\tilde{j}, \tilde{k}) \neq 0 \quad \text{gilt} \quad ,$$

so erfüllt $\tilde{\underline{u}}$ das Kirchhoff'sche Gesetz KVL, falls es von $\underline{v}$ erfüllt wird.

Beweis:

Nach Voraussetzung d) und Voraussetzung (3.2.2.1) c) erhält man für festes $i \in \{1, \dots, l\}$

$$\underline{u}^i = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{u}}_C \\ \tilde{\underline{u}}_{IVS} \\ \tilde{\underline{u}}_R \\ \tilde{\underline{u}}_{VCCS} \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei für $\tilde{\underline{u}}_C \in X = \mathbb{R}^n$, $\tilde{\underline{u}}_{IVS} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\underline{u}}_R \in \mathbb{R}^r$, $\tilde{\underline{u}}_{VCCS} \in \mathbb{R}^s$ gilt:

$$1) \left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{\underline{u}}_C & = & A_{11}^T \underline{\delta}^{(i)} [v_1, \dots, v_{i-1}, w_1, \dots, w_i](\underline{\xi}, \underline{\eta}) + A_{21}^T \underline{\varphi} \\ \tilde{\underline{u}}_{IVS} & = & \underline{\varphi} \\ \tilde{\underline{u}}_R & = & B_{11}^T \underline{\delta}^{(i)} [\dots](\underline{\xi}, \underline{\eta}) + B_{21}^T \underline{\varphi} \quad , \\ \tilde{\underline{u}}_{VCCS} & = & B_{12}^T \underline{\delta}^{(i)} [\dots](\underline{\xi}, \underline{\eta}) \quad . \end{array} \right.$$

Damit erhält man nach Definition (3.2.2.4) :

$$2) \quad \tilde{\underline{u}}_C = (\underline{u}_{C,\mu})_{\mu=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \underline{u}_{C,\mu} \in \mathbb{R}^n{}_{\mu} = X_{\mu} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}_{C,\mu} &= \sum_{\nu=1}^{i-1} \left[(A_{11}^{(\nu\mu)})^T (I_{11}^{(\nu,\nu)} - V_{\nu} W_{\nu}^{-1}) \underline{\eta}_{\nu} + (A_{11}^{(\nu\mu)})^T V_{\nu} W_{\nu}^{-1} \underline{\xi}_{\nu} \right] \\ &\quad + \left[(A_{11}^{(i\mu)})^T (I_{11}^{(i,i)} - W_1^{-1}) \underline{\eta}_1 + (A_{11}^{(i\mu)})^T W_1^{-1} \underline{\xi}_1 \right] \\ &\quad + \sum_{\nu=i+1}^1 (A_{11}^{(\nu\mu)})^T \underline{\eta}_{\nu} + (A_{21}^{(\mu\mu)})^T \varphi_{\mu} \\ &= \sum_{\nu=1}^1 (A_{11}^{(\nu\mu)})^T \underline{\eta}_{\nu} + (A_{21}^{(\mu\mu)})^T \varphi_{\mu} \\ &\quad + \sum_{\gamma=1}^{i-1} (A_{11}^{(\nu\mu)})^T V_{\nu} W_{\nu}^{-1} (\underline{\xi}_{\nu} - \underline{\eta}_{\nu}) + (A_{11}^{(i\mu)})^T W_1^{-1} (\underline{\xi}_1 - \underline{\eta}_1) \\ &= \underline{v}_{C,\mu} + \sum_{\nu=1}^{i-1} (A_{11}^{(\nu\mu)})^T V_{\nu} W_{\nu}^{-1} (\underline{\xi}_{\nu} - \underline{\eta}_{\nu}) + (A_{11}^{(i\mu)})^T W_1^{-1} (\underline{\xi}_1 - \underline{\eta}_1), \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \underline{v}_C = (\underline{v}_{C,\mu})_{\mu=1(1)1} = A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\varphi}.$$

Analog folgt:

$$3) \quad \tilde{\underline{u}}_{IVS} = (\underline{u}_{IVS,\mu})_{\mu=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \underline{u}_{IVS,\mu} \in \mathbb{R}^m{}_{\mu} \quad \text{und}$$

$$\tilde{\underline{u}}_{IVS,\mu} = \underline{u}_{IVS,\mu} = \underline{v}_{IVS,\mu} = \underline{\varphi}$$

$$\text{wobei} \quad \underline{\varphi} = (\varphi_{\mu})_{\mu=1(1)1},$$

$$4) \quad \tilde{\underline{u}}_R = (\tilde{\underline{u}}_{R,\mu})_{\mu=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{u}}_{R,\mu} \in \mathbb{R}^r{}_{\mu} \quad \text{und}$$

$$\tilde{u}_{R,\mu} = v_{R,\mu} + \sum_{\nu=1}^{i-1} (B_{11}^{(\nu,\mu)})^T v_{\nu} w_{\nu}^{-1} (\xi_{\nu} - \eta_{\nu}) + (B_{11}^{(i,\mu)})^T w_i^{-1} (\xi_i - \eta_i)$$

$$\text{wobei } v_R = (v_{R,\mu})_{\mu=1(1)1} = B_{11}^T \eta + B_{21}^T \varphi,$$

$$5) \quad \tilde{u}_{VCCS} = (\tilde{u}_{VCCS,\mu})_{\mu=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_{VCCS,\mu} \in \mathbb{R}^{\mu} \quad \text{und}$$

$$\tilde{u}_{VCCS,\mu} = v_{VCCS,\mu} + \begin{cases} (B_{12}^{(\mu,\mu)})^T v_{\mu} w_{\mu}^{-1} (\xi_{\mu} - \eta_{\mu}) & , \text{ falls } \mu < i \\ (B_{12}^{(i,i)})^T w_i^{-1} (\xi_i - \eta_i) & , \text{ falls } \mu = i \\ 0 & , \text{ falls } \mu > i \end{cases},$$

$$\text{wobei } v_{VCCS} = (v_{VCCS,\mu})_{\mu=1(1)1} = B_{12}^T \eta$$

Sei nun $k, j \in \{1, \dots, l\}$ mit $k < j \leq i$. Nach Voraussetzung e) ist $\Lambda_{11}^{(j,k)} \neq 0$ (d.h. es besteht eine kapazitive Rückkopplung von der j -ten Teilschaltung $MOS^{(j)}$ zur k -ten Teilschaltung $MOS^{(k)}$). Es sei o.E.

$$6) \quad a_{11}^{(jk)}(11) \neq 0 \quad \text{und}$$

$$a_{11}^{(jk)}(\tilde{j}\tilde{k}) = 0 \quad \text{für } j \neq 1 \vee \tilde{k} \neq 1$$

Nach Lemma (3.1.1.4), Behauptung c) gilt dann:

$$7) \quad a_{11}^{(jj)}(1,1) = 1 \quad ,$$

$$a_{11}^{(kk)}(1,1) = 1 \quad ,$$

$$a_{11}^{(jk)}(1,1) = -1 \quad .$$

[vgl. Voraussetzung (3.2.2.1) b), c)] .

Da $b_1^{(j)} \in \mathcal{B}_C^{(j)}$ ein Ausgang der j-ten Teilschaltung $MOS^{(j)}$ ist, gilt nach Definition (3.1.3.1) [vgl. auch Lemma (3.1.3.2)] :

$$b_1^{(j)} = (N_O, N_1^{(j)}) \quad [\text{vgl. Vor. (3.2.2.1) d)]}$$

Daraus folgt, da A die reduzierte Inzidenzmatrix von $\mathcal{G}^{(1, \dots, 1)}$ ist, nach Lemma (3.1.1.4), Behauptung c), und nach Voraussetzung (3.2.2.1) c) :

$$8) \quad v \in \{1, \dots, 1\} : \tilde{v}_v \in \{1, \dots, n_v\} : \left\{ \begin{array}{l} v + j \vee \tilde{v}_j + 1 \rightarrow \\ a(vj)(\tilde{v}1) = 0 \quad . \end{array} \right\}$$

Zur Veranschaulichung diene folgender Ausschnitt aus der reduzierten Inzidenzmatrix A :

Kante Knoten	$b_1^{(k)} \in \mathbb{B}_C^{(k)}$			$b_1^{(j)} \in \mathbb{B}_C^{(j)}$		
	. . .			. . .		
$N_1^{(k)} \in \mathbb{N}_C^{(k)}$	$a_{11}^{(kk)}(11) = 1$			0		
	0			0		
	.			.		
	.			.		
	0			0		
$N_1^{(j)} \in \mathbb{N}_C^{(j)}$	$a_{11}^{(jk)}(11) = -1$			$a_{11}^{(jj)}(11) = 1$		
	0			0		
	.			.		
	.			.		

Da $\mathcal{G}^{(1, \dots, 1)}$, $\mathcal{G}^{(j)}$, $\mathcal{G}^{(k)}$ zusammenhängend sind und der Graph $\mathcal{G}^{(1, \dots, 1)}$ der Schaltung $\text{MOS}^{(1, \dots, 1)}$ nach Voraussetzung f) eine Vorwärtskopplung ausgehend vom k-ten Teilsystem $\text{MOS}^{(k)}$ besitzt, ist der Teilgraph

$$\tilde{\mathcal{G}} := \{\tilde{N}, \tilde{B}, \tilde{\Lambda}\} \quad \text{mit}$$

$$\tilde{N} := N^{(k)} \setminus J^{(k)} \quad \text{und}$$

$$\tilde{B} := (B^{(k)} \setminus \tilde{B}_{\text{IVS}}^{(k)} \setminus \{b_1^{(k)}\}) \quad [\text{vgl. (3.2.2.1) b), c)],$$

von $\mathcal{G}^{(1, \dots, 1)}$ zusammenhängend und enthält einen Ausgang des k-ten Teilsystems, d.h. mit Definition (3.1.3.1) gibt es einen $\tilde{B}$ -Weg

$$9) \quad \tilde{\omega} := (N_{v_1}, b_{\mu_1}, \dots, N_{v_q}, b_{\mu_q}, N_{v_{q+1}}) \quad \text{mit}$$

$$N_{v_1} := N_1^{(k)}, N_{v_2} + N_0, \dots, N_{v_q} + N_0, N_{v_{q+1}} = N_0.$$

Mit

$$b_{\mu_{q+1}} := b_1^{(j)} = (N_0, N_1^{(j)})$$

$$N_{v_{q+2}} := N_1^{(j)}$$

$$b_{\mu_{q+2}} := b_1^{(k)} = (N_1^{(j)}, N_1^{(k)})$$

erhält man aus $\tilde{\omega}$ den geschlossenen $B^{(1, \dots, 1)}$ -Weg

$$10) \quad \omega := (N_{v_1}, b_{\mu_1}, \dots, N_{v_{q+2}}, b_{\mu_{q+2}}, N_1^{(k)})$$

Sei nun

$$M := \{\mu_1, \dots, \mu_{q+2}\}$$

$$N := \{v_1, \dots, v_{q+2}\}$$

Es gilt dann nach dem Kirchhoff'schen Gesetz KVL und nach Bemerkung (3.1.2.2) c) für

$$\underline{v} := A^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} := (v_\mu)_{\mu \in (1) n^*} \quad \text{mit} \quad n^* := n+m+r+s :$$

$$11) \quad \sum_{\mu \in M} v_\mu = 0.$$

Da in jeder Spalte der reduzierten Inzidenzmatrix A des Graphen $G^{(1, \dots, 1)}$, die einer Kante $b \in B^{(1, \dots, 1)}$ zugeordnet ist, so daß N_0 nicht Anfangsknoten und nicht Endknoten von b ist, genau eine 1 und genau eine -1 und sonst nur Nullen stehen, folgt dann für die Schaltung MOS $^{(1, \dots, 1)}$ [vgl. (3.2.2.1)] mit den Ergebnissen 2), ..., 10) und Voraussetzung (3.1.1.3) c) :

$$b_\mu \notin B_{IVS}^{(k)} \quad \text{für } \mu \in M \quad \text{und}$$

$$\text{für } u := A^T \cdot \begin{pmatrix} \delta^{v_i, w_i}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ \varphi \end{pmatrix} := (\tilde{u}_\mu)_{\mu=1(1)n^*} \quad \text{gilt:}$$

$$12) \quad \sum_{\mu \in M} u_\mu = \sum_{\mu \in M} v_\mu + \sum_C + \sum_R + \sum_{VCCS} + \tilde{\sum}$$

wobei folgende Summanden definiert sind:

$$\begin{aligned} \sum_C := & \sum_{\mu \in M \setminus \{\mu_{q+1}, \mu_{q+2}\}} \left[\sum_{h=1}^{i-1} \sum_{v=1}^{n_h} a_{11}^{(hk)}(v\mu) \frac{\alpha_v^{(h)}}{\omega_v^{(h)}} (\xi_{h,v} - \eta_{h,v}) \right. \\ & \left. b_\mu \in B_C^{(k)} \right. \\ & \left. + \sum_{v=1}^{n_i} a_{11}^{(kk)}(v\mu) \frac{1}{\omega_v^{(i)}} (\xi_{i,v} - \eta_{i,v}) \right] \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_R := & \sum_{\mu \in M \setminus \{\mu_{q+1}, \mu_{q+2}\}} \left[\sum_{h=1}^{i-1} \sum_{v=1}^{n_h} b_{11}^{(hk)}(v\mu) \frac{\alpha_v^{(h)}}{\omega_v^{(h)}} (\xi_{h,v} - \eta_{h,v}) \right. \\ & \left. b_\mu \in B_R^{(k)} \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{v=1}^{n_i} b_{11}^{(ik)}(v\mu) \frac{1}{\omega_v^{(i)}} (\xi_{i,v} - \eta_{i,v})]$$

$$= 0 ,$$

$$\sum_{\text{VCCS}} := \sum_{\substack{\mu \in M \setminus \{\mu_{q+1}, \mu_{q+2}\} \\ b_\mu \in \mathcal{B}_{\text{VCCS}}^{(k)}}} \sum_{v=1}^{n_k} b_{12}^{(k,k)}(v\mu) \frac{\alpha_v^{(k)}}{\omega_v^{(k)}} (\xi_{k,v} - \eta_{k,v})$$

$$= 0 .$$

Hierbei sind die Koeffizienten von $\xi_{\underline{h}}$, $\eta_{\underline{h}}$ für $h = 1, \dots, l$ mit $\xi_{h,v}$, $\eta_{h,v}$ ($v = 1, \dots, n_h$) bezeichnet.

Ferner ist für $j < i$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sum} &:= u_{\mu_{q+1}} + u_{\mu_{q+2}} - (v_{\mu_{q+1}} + v_{\mu_{q+2}}) \\ &= v_{\mu_{q+1}} + a_{11}^{(jj)}(11) \frac{\alpha_1^{(j)}}{\omega_1^{(j)}} (\xi_{j,1} - \eta_{j,1}) \\ &\quad + v_{\mu_{q+2}} + a_{11}^{(kk)}(11) \frac{\alpha_1^{(k)}}{\omega_1^{(k)}} (\xi_{k,1} - \eta_{k,1}) + a_{11}^{(jk)}(11) \frac{\alpha_1^{(j)}}{\omega_1^{(j)}} (\xi_{j,1} - \eta_{j,1}) \\ &\quad - v_{\mu_{q+1}} - v_{\mu_{q+2}} \\ &= \frac{\alpha_1^{(k)}}{\omega_1^{(k)}} (\xi_{k,1} - \eta_{k,1}) , \text{ da } a_{11}^{(jj)}(11) = 1 , a_{11}^{(jk)}(11) = -1. \end{aligned}$$

Analog erhält man für $j = i$, wobei in der obigen Rechnung

$$\frac{1}{\omega_1(j)} = \frac{1}{\omega_1(i)} \quad \text{anstelle von} \quad \frac{\alpha_1(j)}{\omega_1(j)} \quad \text{zu setzen ist:}$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\alpha_1(k)}{\omega_1(k)} (\xi_{k,1} - \eta_{k,1}) .$$

Mit 11) und 12) folgt dann, falls $\alpha_1(k) = 0$ gesetzt wird:

$$\sum_{\mu \in M} \tilde{u}_\mu = 0 ,$$

d.h., $\tilde{\underline{u}}$ erfüllt das Kirchhoff'sche Gesetz KVL.

Anmerkung zum obigen Beweis:

13) Existieren mehr als eine Rückkopplung vom j -ten Teilsystem zum k -ten Teilsystem [vgl. hierzu 6)], so ist für jede dieser Rückkopplungen ein geschlossener $\mathcal{B}^{(1, \dots, 1)}$ -Weg gemäß 9), 10) anzugeben und der Beweis analog fortzuführen.

14) Für resistive Rückkopplungen [hier sind nach Vor. e) nur kapazitive Rückkopplungen behandelt] ist der Beweis analog zu führen.

□

(3.2.2.6) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

a) Es sei eine zusammengesetzte MOS-Schaltung $MOS^{(1, \dots, 1)}$ und ihre reduzierte Inzidenzmatrix A gemäß Voraussetzung (3.2.2.1) mit den dortigen Bezeichnungen gegeben.

b) Seien

$C \in \mathbb{R}^{n,n}$ Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen,

$R \in \mathbb{R}^{r,r}$ Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen,

$$\underline{g}_{vccs}^{(i)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \supset D_C \times D_{vccs} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$$

$$(\underline{v}_C, \underline{v}_{vccs}) \mapsto \underline{g}_{vccs}^{(i)}(\underline{v}_C, \underline{v}_{vccs})$$

stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, l$

$$\underline{g}_{vccs} := (\underline{g}_{vccs}^{(i)})_{i=1(1)l} : D_C \times D_{vccs} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar, $D_C \times D_{vccs}$ offen.

c) Sei gemäß (3.1.2.4)

$$S := A_{11}^T \subset A_{11}^T \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{und}$$

$$\underline{g} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset D_{\underline{\xi}} \times \mathbb{R}^m \times D_{\varphi} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\underline{\xi}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) \mapsto \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}', \underline{\psi})$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{\xi}, \underline{\psi}', \underline{\psi}) := & -(A_{11} \subset A_{21}^T) \underline{\psi}' - (B_{11} R^{-1} B_{21}^T) \underline{\psi} \\ & - (B_{11} R^{-1} B_{11}^T) \underline{\xi} - B_{12} \underline{g}_{vccs} (A_{11}^T \underline{\xi} + A_{21}^T \underline{\psi}, B_{12}^T \underline{\xi}) \end{aligned}$$

und mit $D_{\underline{\xi}}, D_{\varphi}$ offen, so daß

$$\begin{array}{l} \underline{v} \\ \underline{\xi} \in D_{\underline{\xi}} \\ \underline{\psi} \in D_{\varphi} \end{array} : \begin{array}{l} A_{11}^T \underline{\xi} + A_{21}^T \underline{\psi} \in D_C, \\ B_{12}^T \underline{\xi} \in D_{vccs} \end{array}$$

d) $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_O^+, D_{\varphi})$ mit $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$

e) Für $\underline{x} \in C^1(\mathbb{R}_0^+, D_{\underline{\xi}})$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ sei

$$\underline{f}(\dot{\underline{x}}(t), \underline{x}(t), t) := S \dot{\underline{x}}(t) - \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}(t)) ,$$

ferner sei $\underline{f}$ gemäß $\mathbb{R}^n := \coprod_{j=1}^l \mathbb{R}^{n_j}$ partitioniert zu

$$\underline{f} = (\underline{f}_i)_{i=1(1)1} \quad [\text{vgl. Definition (1.1.1.2)}].$$

f) Es existiere genau eine Rückkopplung vom j-ten Teilsystem

(Knoten $N_{v_j}^{(j)}$, $v_j \in \{1, \dots, n_j\}$) zum k-ten Teilsystem (Knoten

$N_{v_k}^{(k)}$, $v_k \in \{1, \dots, n_k\}$) , $k < j$.

g) Seien v_i, w_i für $i = 1, \dots, l$ gemäß Definition (3.2.2.4) gegeben und sei mit

$$V_k^o := V_k - \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & \alpha_{v_k}^{(k)} & \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow v_k\text{-te Zeile}$$

$$\underline{\delta}^{(i)}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \underline{\delta}[v_1, \dots, v_{i-1}, w_1, \dots, w_i](\underline{\xi}, \underline{\eta})$$

$$\underline{\delta}_0^{(i)}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \underline{\delta}[v_1, \dots, v_{k-1}, v_k^o, v_{k+1}, \dots, v_{i-1}, w_1, \dots, w_i](\underline{\xi}, \underline{\eta})$$

$$\text{für } \underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^n .$$

h) Für $\underline{x}, \underline{y} \in C^1(\mathbb{R}_0^+, D_{\underline{\xi}})$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ sei

$$\Delta_{v_j, v_k}^{(i)} [\underline{x}, \underline{y}](t) := \underline{f}_1(\underline{\delta}^{(i)}(\underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{y}}(t)), \underline{\delta}^{(i)}(\underline{x}(t), \underline{y}(t)), t) - \\ - \underline{f}_1(\underline{\delta}_0^{(i)}(\underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{y}}(t)), \underline{\delta}_0^{(i)}(\underline{x}(t), \underline{y}(t)), t)$$

Behauptung:

Für $\underline{x}, \underline{y} \in C^1(\mathbb{R}_0^+, D_{\underline{\xi}})$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Delta_{v_j, v_k}^{(i)} [\underline{x}, \underline{y}](t) = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

und

$$\Delta_{v_j, v_k}^{(j)} [\underline{x}, \underline{y}](t) = \frac{\alpha_{v_k}^{(k)}}{\omega_{v_k}^{(k)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho^{(i)}(\underline{x}_k(t) - \underline{y}_k(t))$$

mit

$$\gamma(t) := [\underline{z}_\mu(A_{11}) \ C \ \underline{z}_v(A_{11})^T] (\dot{x}_{k, v_k}(t) - \dot{y}_{k, v_k}(t)) \\ + [\underline{z}_\mu(B_{11}) R^{-1} \underline{z}_v(B_{11})^T] (x_{k, v_k}(t) - y_{k, v_k}(t)) ,$$

$$\varrho^{(i)} \in C(\mathbb{R}^{n_k}, \mathbb{R}^{n_j}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\|\underline{z}_k\| \rightarrow 0} \frac{\|\varrho^{(i)}(\underline{z}_k)\|}{\|\underline{z}_k\|} = 0 ,$$

wobei folgende Bezeichnungsweise verwendet sei:

1) $\underline{z}_v(M)$ bezeichne den v -ten Zeilenvektor der Matrix M

$$\underline{x}(t) := (\underline{x}_i(t))_{i=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \underline{x}_i(t) := (x_{i,v_i})_{v_i=1, \dots, n_i}$$

$$\underline{y}(t) := (\underline{y}_i(t))_{i=1(1)1} \quad \text{mit} \quad \underline{y}_i(t) := (y_{i,v_i})_{v_i=1, \dots, n_i}.$$

Beweis:

Seien $\underline{x}, \underline{y} \in C^1(\mathbb{R}_O^+, D_{\underline{\xi}})$ und $t \in \mathbb{R}_O^+$. Zur Abkürzung seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &:= \underline{x}(t) \quad , \quad \underline{\eta} := \underline{y}(t) \quad , \quad \underline{\Psi} := \varphi(t) \quad , \\ \underline{\xi}' &:= \dot{\underline{x}}(t) \quad , \quad \underline{\eta}' := \dot{\underline{y}}(t) \quad , \quad \underline{\Psi}' := \dot{\varphi}(t) \quad . \end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen b), c), d), e), g), nach Voraussetzung (3.2.2.1) und nach 2), 3), 4), 5) aus dem Beweis zu Satz (3.2.2.5) erhält man für $i = 1, \dots, l$ mit

$$\tilde{A}_{11}^{(i)} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (\Lambda_{11}^{(11)})^T V_1 W_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline (\Lambda_{11}^{(i-1,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (\Lambda_{11}^{(i-1,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline (\Lambda_{11}^{(i,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (\Lambda_{11}^{(i,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & (\Lambda_{11}^{(ii)})^T W_i^{-1} & 0 \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline (\Lambda_{11}^{(l,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (\Lambda_{11}^{(l,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & (\Lambda_{11}^{(li)})^T W_i^{-1} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{A}_{11}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad ,$$

$$\bar{B}_{11}^{(i)} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (B_{11}^{(11)})^T V_1 W_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline (B_{11}^{(i-1,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (B_{11}^{(i-1,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^T & 0 & 0 \\ \hline (B_{11}^{(1,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (B_{11}^{(1,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & (B_{11}^{(ii)})^T W_i^{-1} & 0 \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline (B_{11}^{(1,1)})^T V_1 W_1^{-1} & \dots & (B_{11}^{(1,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & (B_{11}^{(1,i)})^T W_i^{-1} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{B}_{11}^{(i)} \in \mathbb{R}^{r,n},$$

$$\bar{B}_{12}^{(1)} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (B_{12}^{(11)})^T V_1 W_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & (B_{12}^{(i-1,i-1)})^T V_{i-1} W_{i-1}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (B_{12}^{(ii)})^T W_i^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{B}_{12}^{(1)} \in \mathbb{R}^{s,n}$$

und mit

$$\overset{\circ}{A}_{11}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)} \in \mathbb{R}^{r,n}, \quad \overset{\circ}{B}_{12}^{(i)} \in \mathbb{R}^{s,n},$$

die man aus $\bar{A}_{11}^{(i)}, \bar{B}_{11}^{(i)}, \bar{B}_{12}^{(i)}$ erhält, indem v_k durch v_k^0 ersetzt wird, folgende Darstellung von $\Delta_{v_j, v_k}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{v_j, v_k}^{(i)} [x, y](t) &= \underline{f}_1(\underline{\delta}^{(i)}(\underline{\xi}', \underline{\eta}'), \underline{\delta}^{(i)}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), t) \\ &\quad - \underline{f}_1(\underline{\delta}_0^{(i)}(\underline{\xi}', \underline{\eta}'), \underline{\delta}_0^{(i)}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), t) \\ &= \{ \underline{b}z_1(A_{11}) \cdot C[A_{11}^T \underline{\eta}' + A_{21}^T \underline{\psi}' + \bar{A}_{11}^{(i)}(\underline{\xi}' - \underline{\eta}')] \\ &\quad + \underline{b}z_1(B_{11})R^{-1}[B_{11}^T \underline{\eta} + B_{21}^T \underline{\psi} + \bar{B}_{11}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta})] \\ &\quad + \underline{b}z_1(B_{12})g_{VCCS}(A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\psi} + \bar{A}_{11}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta}), B_{12}^T \underline{\eta} + \bar{B}_{12}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta})) \} \\ &\quad - \{ \underline{b}z_1(A_{11}) \cdot C[A_{11}^T \underline{\eta}' + A_{21}^T \underline{\psi}' + \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}(\underline{\xi}' - \underline{\eta}')] \\ &\quad + \underline{b}z_1(B_{11})R^{-1}[B_{11}^T \underline{\eta} + B_{21}^T \underline{\psi} + \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta})] \\ &\quad + \underline{b}z_1(B_{12})g_{VCCS}(A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\psi} + \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta}), B_{12}^T \underline{\eta} + \overset{\circ}{B}_{12}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta})) \} \\ &= \underline{b}z_1(A_{11}) \cdot C[\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}](\underline{\xi}' - \underline{\eta}') \\ &\quad + \underline{b}z_1(B_{11})R^{-1}[\bar{B}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}](\underline{\xi} - \underline{\eta}) \\ &\quad + B_{12}^{(ii)}[g_{VCCS}(A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\psi} + \bar{A}_{11}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta}), B_{12}^T \underline{\eta} + \bar{B}_{12}^{(i)}(\underline{\xi} - \underline{\eta})) \end{aligned}$$

1) $\underline{b}z_i(M)$ bezeichne die i-te Blockzeile einer Matrix

$M = (M^{(ij)})_{i,j=1(1)1}$ mit $M^{(ij)}$ als Teilmatrizen, z.B.

$$\underline{b}z_1(A_{11}) = (A_{11}^{(i1)}, \dots, A_{11}^{(i1)})$$

$$- \underline{g}_{vccs}^{(i)} (A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\psi} + \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)} (\underline{\xi} - \underline{\eta}), B_{12}^T \underline{\eta} + \overset{\circ}{B}_{12}^{(i)} (\underline{\xi} - \underline{\eta}))]$$

$$\begin{aligned} 1) &= \underline{bz}_1 (A_{11}) C [\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}] (\underline{\xi}' - \underline{\eta}') \\ &+ \underline{bz}_1 (B_{11}) R^{-1} [\bar{B}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}] (\underline{\xi} - \underline{\eta}) \\ &+ B_{12}^{(11)} [\frac{\partial}{\partial \underline{v}_C} \underline{g}_{vccs}^{(1)} (\underline{v}_C, \underline{v}_{vccs})] \cdot \underline{bz}_k ((\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)})^T) (\underline{\xi}_k - \underline{\eta}_k) \\ &+ B_{12}^{(11)} [\frac{\partial}{\partial \underline{v}_{vccs}} \underline{g}_{vccs}^{(1)} (\underline{v}_C, \underline{v}_{vccs})] \underline{bz}_k ((\bar{B}_{12}^{(i)} - \overset{\circ}{B}_{12}^{(i)})^T) (\underline{\xi}_k - \underline{\eta}_k) \\ &+ \underline{\rho}^{(i)} (\underline{\xi}_k - \underline{\eta}_k) , \end{aligned}$$

wobei

$$\underline{\rho}^{(i)} \in C(\mathbb{R}^{n_k}, \mathbb{R}^{n_i}) \text{ stetig mit } \lim_{\|\underline{\zeta}_k\| \rightarrow 0} \frac{\|\underline{\rho}^{(i)}(\underline{\zeta}_k)\|}{\|\underline{\zeta}_k\|} = 0 ,$$

$$\underline{v}_C := A_{11}^T \underline{\eta} + A_{21}^T \underline{\psi} , \quad \underline{v}_{vccs} := B_{12}^T \underline{\eta} .$$

Nach Voraussetzung f) unterscheiden sich $\bar{A}_{11}^{(i)}$ und $\overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}$ bzw. $\bar{B}_{11}^{(i)}$ und $\overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}$ bzw. $\bar{B}_{12}^{(i)}$ und $\overset{\circ}{B}_{12}^{(i)}$ nur in der v -ten Spalte,

wobei $v := \sum_{\sigma=1}^{k-1} n_{\sigma} + v_k$ ist, falls $i > k$.

Für $i \leq k$ gilt $\bar{A}_{11}^{(i)} = \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}$ und $\bar{B}_{11}^{(i)} = \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}$ und $\bar{B}_{12}^{(i)} = \overset{\circ}{B}_{12}^{(i)}$

Also erhält man aus 1) :

$$2) \quad \Delta_{\underline{v}_j, \underline{v}_k}^{(i)} [\underline{x}, \underline{y}](t) = 0 \quad \text{für } i \leq k$$

und

$$\begin{aligned}
 3) \quad \Delta_{v_j, v_k}^{(i)} [\underline{x}, \underline{y}](t) &= \\
 &= \underline{bz}_i (A_{11}) C \underline{z}_v (\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}) (\xi_{k, v_k}^{(i)} - \eta_{k, v_k}^{(i)}) \\
 &+ \underline{bz}_i (B_{11}) R^{-1} \underline{z}_v (\bar{B}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}) (\xi_{k, v_k}^{(i)} - \eta_{k, v_k}^{(i)}) \\
 &+ B_{12}^{(ii)} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{v}} g_{vccs}^{(i)} (\underline{v}_c, \underline{v}_{vccs}) \right] \underline{z}_v (\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}) (\xi_{k, v_k}^{(i)} - \eta_{k, v_k}^{(i)}) \\
 &+ 0 + \underline{\rho}^{(i)} (\xi_{k, v_k}^{(i)} - \eta_{k, v_k}^{(i)}) \quad \text{für } i > k
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung f) gilt für festes $i > k$, $v_i \in \{1, \dots, n_i\}$:

und $\mu := \sum_{\sigma=1}^{i-1} n_{\sigma} + v_i$ (da in jeder Spalte von A höchstens

zwei von Null verschiedene Koeffizienten aus $J := \{-1, 0, +1\}$

stehen und C und R^{-1} Diagonalmatrizen sind) aufgrund der

Existenz genau einer Rückkopplung vom Knoten $N_{v_j}^{(j)}$ zum Knoten

$N_{v_k}^{(k)}$ für $\mu = \sum_{\sigma=1}^{j-1} n_{\sigma} + v_j$:

$$4) \quad \underline{z}_{\mu} (A_{11}) C \underline{z}_v (\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}) = 0 \quad \text{und}$$

$$\underline{z}_{\mu} (B_{11}) R^{-1} \underline{z}_v (\bar{B}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{B}_{11}^{(i)}) = 0 .$$

Wegen Voraussetzung (3.1.1.3) d) und Definition (3.1.3.1) und

wegen Lemma (3.1.3.2) gilt schließlich

$$5) \quad \left[\frac{\partial}{\partial \underline{v}_c} g_{vccs}^{(i)} (\underline{v}_c, \underline{v}_{vccs}) \right] \underline{z}_v (\bar{A}_{11}^{(i)} - \overset{\circ}{A}_{11}^{(i)}) = 0$$

Aus 3), 4), 5) und aus der Definition von v_k^0 [s. Vor. g)] erhält man dann die Behauptung. $\square$

(3.2.2.7) BEMERKUNGEN :

a) Existieren mehrere Rückkopplungen vom Knoten $N_{\nu_j}^{(j)}$ des j -ten Teilsystems $MOS^{(j)}$ zu Knoten $N_{\nu_k}^{(k)} \in \mathbb{M}$ mit $\mathbb{M} \subset \{N_{\nu_k}^{(k)} \in N^{(k)} \setminus J^{(k)} : k = 1, \dots, j-1, \nu_k = 1, \dots, n_k\}$, so ist für $\underline{x}, \underline{y} \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n)$ und $t \in [0, T]$ die Differenz $\Delta_{\nu_j, \mathbb{M}}^{(j)}$ wie folgt zu definieren:

$$\Delta_{\nu_j, \mathbb{M}}^{(j)}[\underline{x}, \underline{y}](t) := \sum_{N_{\nu_k}^{(k)} \in \mathbb{M}} \Delta_{\nu_j, \nu_k}^{(j)}[\underline{x}, \underline{y}](t)$$

b) Führt man den AWR-Algorithmus unter den Voraussetzungen von Satz (3.2.2.6) mit der gemäß (3.2.2.6) g) definierten Entkopplungsfunktion $\delta_O^{(i)}$, $i = 1, \dots, l$, durch, um das AWP

$$\underline{f}(\underline{\dot{x}}, \underline{x}, t) := S \underline{\dot{x}} - \underline{g}(\underline{x}, \underline{\phi}, \underline{\varphi}) = 0 \quad \text{auf } [0, T],$$

$$\underline{\dot{x}}(0) = 0, \quad \underline{x}(0) = 0$$

zu lösen, so erhält man für die derart gewonnene Folge von Näherungslösungen $(\underline{p}_{h \in \mathbb{N}_0}^{(h)} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n))$ zu einer Startlösung $\underline{p}^{(0)} := \underline{s} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$:

$$\Delta_{v_j, v_k}^{(j)} \{ \underline{p}^{(h)}, \underline{p}^{(h-1)} \} (t) =$$

$$= f_t(\delta^{(i)}(\underline{p}^{(k)}(t), \underline{p}^{(h-1)}(t)), \delta^{(i)}(\underline{p}^{(h)}(t), \underline{p}^{(h-1)}(t)), t),$$

d.h. $\Delta_{v_j, v_k}^{(j)} \{ \underline{p}^{(h)}, \underline{p}^{(h-1)} \}$ beschreibt die Auswirkung der Rückkopplung vom Knoten $N_{v_j}^{(j)}$ zum Knoten $N_{v_k}^{(k)}$ im h -ten Relaxationsschritt ($h \geq 1$) auf das Kirchhoff'sche Gesetz KCL [vgl. (3.1.2.1) a) und (3.1.2.4)]. Durch die Wahl

$$\alpha_{v_k}^{(k)} = 0$$

wird also zweierlei gewährleistet:

- 1) $\delta_0^{(i)}(\underline{p}^{(k)}, \underline{p}^{(h-1)})$ erfüllt das Kirchhoff'sche Gesetz KVL, falls es von $\underline{p}^{(k-1)}$ auf $[0, T]$ erfüllt wird [siehe Satz (3.2.2.5)];
- 2) Die Störung des Kirchhoff'schen Gesetzes KCL wird korrigiert.

c) Setzt man für $0 \leq \alpha \leq \omega$, $0 < \omega_0 \leq \omega \leq 1$

$$\alpha_{v_j}^{(j)} = \alpha \quad , \quad \omega_{v_j}^{(j)} = \omega \quad \text{für } j \neq k \vee v_j \neq v_k \quad ,$$

$$\alpha_{v_k}^{(k)} = 0 \quad , \quad \omega_{v_k}^{(k)} = \omega \quad ,$$

so können die Ergebnisse aus Teil 1 und Teils 2 auch für die Transientenanalyse von MOS-Schaltungen mit globalen Rückkopp-

lungen übertragen werden. Die Partitionierung des zugehörigen Anfangswertproblems richtet sich dabei nach dem (angeordneten) Aufbau der Schaltung $MOS^{(1, \dots, 1)}$ aus den einzelnen Teilschaltungen $MOS^{(1)}, \dots, MOS^{(1)}$.

TEIL 4 : CROSS-TALK-SIMULATION MIT DER WAVEFORM RELAXATION

Infolge der zunehmenden Packungsdichte auf VLSIC's gewinnt die Untersuchung der gegenseitigen elektromagnetischen Beeinflussung sehr nahe beieinander liegender Signalleitungen - sie wird als "cross-talk" bzw. "Übersprechung" bezeichnet - an Bedeutung. Erste Ansätze zu derartigen Analysen findet man etwa in (32) und (5); dort werden eine Reihe experimentell gefundener Ergebnisse sowie einfache Modellgleichungen, welche Verluste auf den Leitungen nicht berücksichtigen, hergeleitet. Eine wichtige Größe zur Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften von Leitungssystemen - insbesondere im Hinblick auf die Verbindung mit einzelnen Schaltungselementen - ist die charakteristische Impedanz

$$Z = \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}$$

wobei L und C die örtliche Induktivität und Kapazität bezeichnen. Methoden zur Bestimmung dieser Größen werden in (5), (9) und (43) beschrieben. Eine umfassende Literaturliste zur cross-talk-Simulation gibt Rhuehl (43) an.

In Anlehnung an Ho (22) wird hier in Abschnitt 4.1 auf der Basis eines Leitungsmodells, das den Wellentransport und den dabei auftretenden Energieverlust durch einen Ersatzschaltkreis mit einer Induktivität, einer Kapazität und zwei entsprechend angeordneten Widerständen beschreibt, die Kopplung der einzelnen Leitungen durch sog. Kopplungsinduktivitäten und Kopplungskapazitäten dargestellt. Man erhält ein hyperbolisches System partieller

Differentialgleichungen, das unter geeigneten Symmetrieeigenschaften eine Diagonalisierung des Differentialoperators erlaubt.

Unter Verwendung von Ergebnissen der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren werden in Abschnitt 4.2 Reflexionseigenschaften eines sachgemäßen Anfangs-Randwertproblems für die cross-talk-Simulation beschrieben. Die Einbettung der cross-talk-Simulation in die Schaltungssimulation geschieht schließlich durch eine Semidiskretisierung des Differentialoperators der cross-talk-Gleichungen

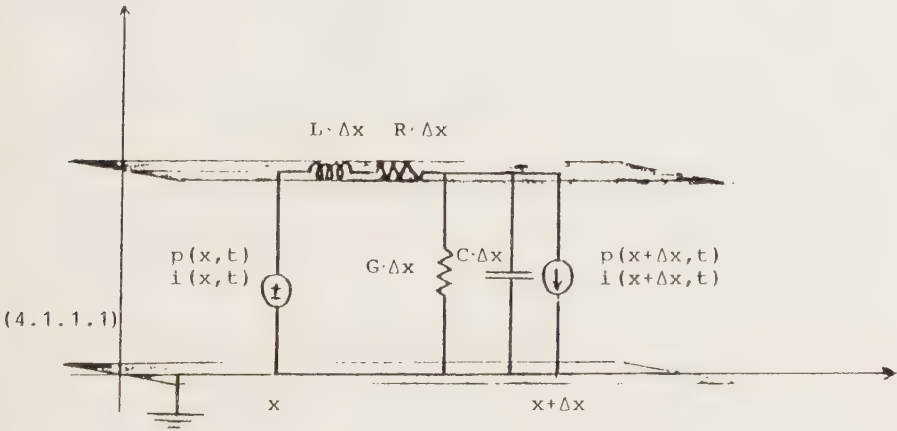
4.1 Kopplungen zwischen parallelen Bandleitungen

Ausgehend von einer Ersatzschaltung für ein kurzes Leitungsstück werden die beiden Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer Bandleitung unter Verwendung der in Abschnitt 3.1 bereitgestellten Hilfsmittel formuliert.

Auf diesem Leitungsmodell baut die Beschreibung des Übersprechungsverhaltens paralleler Bandleitungen durch kapazitive und induktive Kopplungen auf. Man erhält ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches auf eine verallgemeinerte Form der Telegraphengleichung führt.

4.1.1 Das Schaltungsmodell für Bandleitungen

Gegeben sei eine Bandleitung der Länge h gemäß folgender Abbildung:



Dabei seien

$G, R > 0$ Verlustwiderstände,

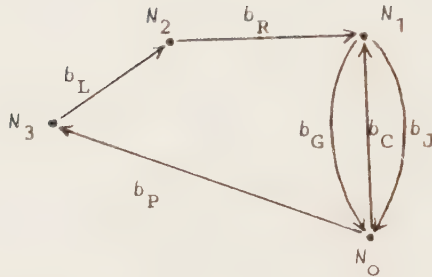
$L > 0$ Induktivität,

$C > 0$ Kapazität.

$x \in [0, h]$, $t \in [0, T]$

Der in Abbildung (4.1.1.1) für das Teilstück der Länge Δx der gegebenen Bandleitung definierten Ersatzschaltung kann folgender gerichteter Graph zugeordnet werden:

(4.1.1.2)



$$G = (N, B, \tilde{A}) \quad \text{mit}$$

$$N := \{N_0\} \cup \{N_1, N_2\} \cup \{N_3\} ,$$

$$B := \{b_C, b_L\} \cup \{b_P\} \cup \{b_R, b_G\} \cup \{b_J\} ,$$

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} := (A_1, A_2)$$

Gemäß Brayton und Moser (4) erhält man dann analog zu Abschnitt

3.1.2 aus den Kirchhoff'schen Gesetzen für die Kantenströme

$i_C, i_L, i_P, i_R, i_G, i_J$ und für die Kantenspannungen

$v_C, v_L, v_P, v_R, v_G, v_J$ mit den Zustandsgleichungen

$$i_C = C \cdot \Delta x \frac{\partial}{\partial t} v_C ,$$

$$v_L = L \cdot \Delta x \frac{\partial}{\partial t} i_L ,$$

$$v_P = p(x, t) , \quad i_P = i(x, t) ,$$

$$i_R = \frac{1}{R \cdot \Delta x} v_R$$

$$i_G = \frac{1}{G \cdot \Delta x} v_G ,$$

$$i_J = i(x+\Delta x, t) , \quad v_J = p(x+\Delta x, t)$$

Die beiden folgenden Differentialgleichungen für $t \in (0, T]$:

$$C \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{i(x+\Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} + \frac{1}{G} p(x, t) = 0$$

(4.1.1.3)

$$L \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) + \frac{p(x+\Delta x, t) - p(x, t)}{\Delta x} + R i(x, t) = 0$$

Mit $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man daraus die beiden folgenden partiellen Differentialgleichungen für das Potential p und den Strom i :

$$C \frac{\partial}{\partial t} p + \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{1}{G} p = 0$$

(4.1.1.4)

auf $(0, h) \times (0, T]$.

$$L \frac{\partial}{\partial t} i + \frac{\partial}{\partial x} p + R i = 0$$

Sind geeignete Randbedingungen für $x=0$ und $x=h$ und Anfangsbedingungen für $t=0$ dem System (4.1.1.4) zugeordnet, so kann man für das entstehende Anfangs-Randwertproblem unter Verwendung der Laplace-Transformation und der sog. Bessel-Funktion

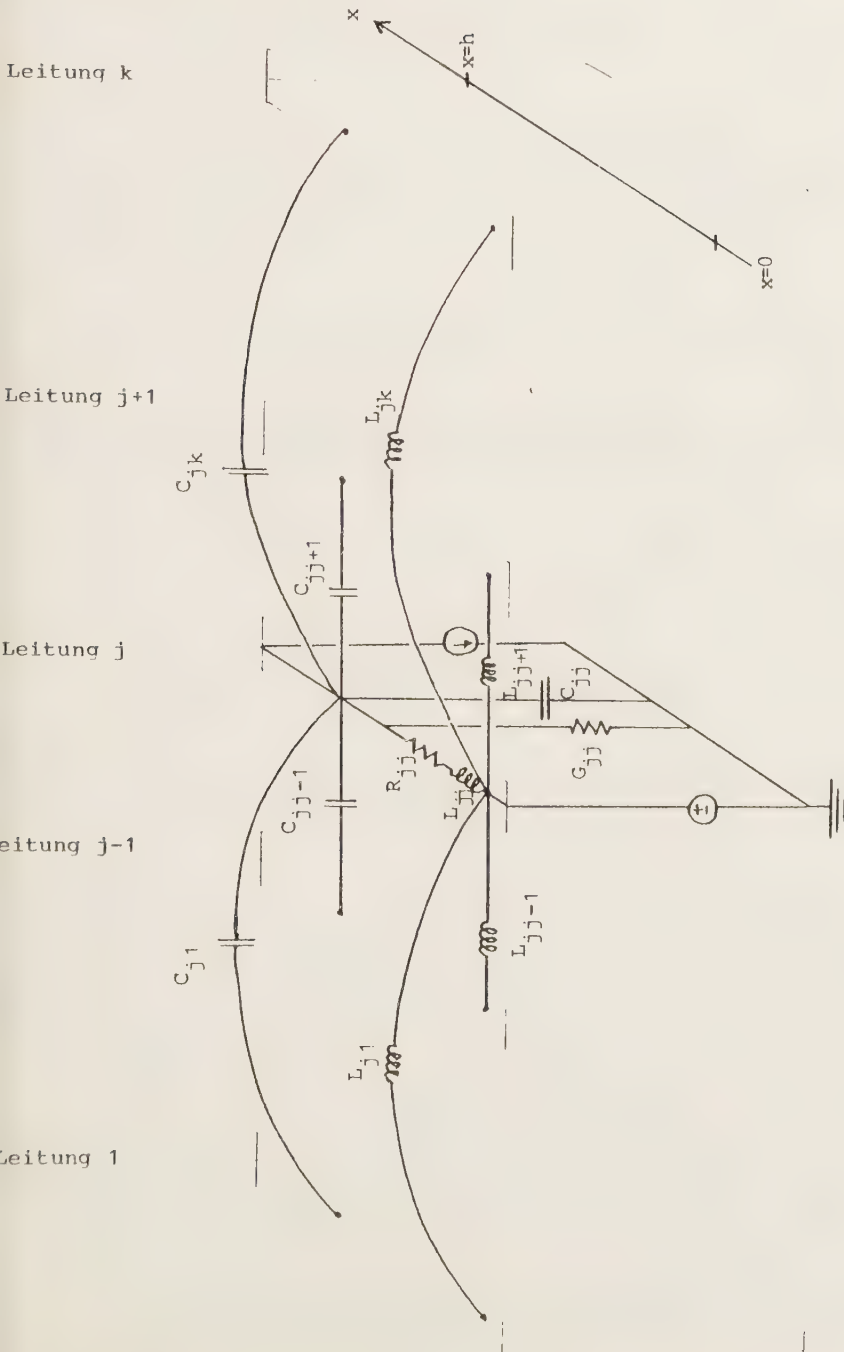
$$J(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}$$

die eindeutig bestimmte Lösung analytisch bestimmen [vgl. hierzu (13), pp. 275-285].

4.1.2 Die Gleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Kopplung von Bandleitungen

C.W. Ho (22) und D.K. Lynn et al. [(32), p. 349] geben Modelle an, welche das Übersprechungsverhalten paralleler Bandleitungen durch kapazitive und induktive Kopplungen zwischen den einzelnen Leitungen beschreiben. Dabei werden verlustfreie Leitungen vorausgesetzt. In Analogie dazu wird hier ein Modell auf der Basis von Leitungen, die Verlustwiderstände enthalten, vorgeschlagen. Gegeben sei also ein System paralleler Bandleitungen der Länge $h > 0$ gemäß Abbildung (4.1.2.1) :

(4.1.2.1) CROSS-TALK-MODELL



Für die Parameter des cross-talk-Modells (4.1.2.1) gelte:

(4.1.2.2) VORAUSSETZUNGEN:

a) Parameter der j-ten Bandleitung, $j = 1, \dots, k$, $k \geq 2$:

$L_{jj}(x) > 0$ Induktivität,

$C_{jj}(x) > 0$ Kapazität,

$R_{jj}(x) > 0$, $G_{jj}(x) > 0$ Verlustwiderstände

$v_j(x) := (L_{jj}(x)C_{jj}(x))^{-1/2}$ Ausbreitungsgeschwindigkeit der
TEM-Wellen, ¹⁾

$z_j(x) := \left(\frac{L_{jj}(x)}{C_{jj}(x)} \right)^{1/2}$ charakteristische Impedenz,

$\gamma_j(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{jj}(x)G_{jj}(x)} + \frac{R_{jj}(x)}{L_{jj}(x)} \right)$ Dämpfungsfaktor,

$\tilde{\gamma}_j(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{jj}(x)G_{jj}(x)} - \frac{R_{jj}(x)}{L_{jj}(x)} \right)$ Deformationsfaktor,

für $x \in (0, h)$.

b) Parameter der Kopplung der j-ten Bandleitung mit den restlichen Bandleitungen:

$L_{ji}(x) > 0$ mit $\sum_{i \neq j} L_{ji}(x) < L_{jj}(x)$,

$C_{ji}(x) > 0$ mit $\sum_{i \neq j} C_{ji}(x) < C_{jj}(x)$

für $i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k$ und $x \in (0, h)$.

1) TEM-Wellen: transversale elektromagnetische Wellen

(4.1.2.3) LEMMA :

Voraussetzungen:

Gegeben sei ein System von $k \geq 2$ parallelen Bandleitungen gemäß Abbildung (4.1.2.1). Es gelten (4.1.2.2) a) und b).

Seien

$$\underline{i}(x,t) := (i_j(x,t))_{j=1(1)k} \quad , \quad \underline{p}(x,t) := (p(x,t))_{j=1(1)k}$$

die Vektorfunktionen der Ströme und Potentiale der einzelnen Leitungen und seien ferner:

$$C(x) := \begin{pmatrix} C_{11}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{kk}(x) \end{pmatrix} = (C_{jj}(x))_{j=1(1)k} \in \mathbb{R}^{k,k} \quad ,$$

$$L(x) := (L_{ij}(x))_{i,j=1(1)k} \in \mathbb{R}^{k,k} \quad ,$$

$$G(x) := \begin{pmatrix} G_{11}^{-1}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{kk}^{-1}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k} \quad ,$$

$$R(x) := \begin{pmatrix} R_{11}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{kk}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k} \quad ,$$

$$\Omega := \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < h \quad , \quad 0 < t \leq T \}$$

Behauptung:

$\underline{p}$ und $\underline{i}$ erfüllen auf $\mathbb{R}$ das System partieller Differentialgleichungen

$$a) \quad C(x) \frac{\partial}{\partial t} \underline{p} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + G(x) \underline{p} = 0$$

$$b) \quad L(x) \frac{\partial}{\partial t} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{p} + R(x) \underline{i} = 0$$

Beweis:

Die Gleichungen werden analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.1.1 mit den Hilfsmitteln aus (4) und Abschnitt 3.1.2 hergeleitet, vgl. hierzu auch [(22), Abschnitt 2] .

□

Das oben beschriebene Modell (4.1.2.1), (4.1.2.2), (4.1.2.3) berücksichtigt nur eine Raumdimension, die Länge des Leitungssystems. Die gegenseitige Kopplung der einzelnen Leitungen durch Induktivitäten und Kapazitäten dient zur Beschreibung der Überlagerung der auf den Leitungen erzeugten elektromagnetischen Felder bei einer sehr dichten Anordnung. Sind die Wellenlängen der sich auf den Leitungen ausbreitenden Wellen in der Größenordnung der Leitungsquerschnitte, so ist dieses Modell nicht mehr brauchbar, in diesem Fall muß sich eine Simulation der Übersprechungsvorgänge auf die Maxwell'schen Gleichungen stützen.

Für die weiteren Überlegungen sind die folgenden Eigenschaften der Eigenwerte von L , C und LC auszunutzen.

(4.1.2.4) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Für $x \in (0, h)$ seien $L(x)$ und $C(x)$ gemäß Lemma (4.1.2.3) gegeben. Ferner seien für $x \in (0, h)$:

$\lambda(x) \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $L(x)$

$\kappa(x) \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $C(x)$

Behauptungen:

$$a) \quad \lambda(x) \in \bigcup_{j=1}^k \{z \in \mathbb{C} : |z - L_{jj}(x)| < L_{jj}(x)\}$$

$$\kappa(x) \in \bigcup_{j=1}^k \{z \in \mathbb{C} : |z - C_{jj}(x)| < C_{jj}(x)\}$$

$$c) \quad \operatorname{Re}(\lambda(x)) > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\kappa(x)) > 0$$

$$d) \quad L(x), C(x) \text{ symmetrisch} \Rightarrow \lambda(x), \kappa(x) \in \mathbb{R}^+$$

Beweis:

Mit Voraussetzung (4.1.2.2) b) folgen die Behauptungen a) und b) sofort aus dem Einschließungssatz von Gerschgorin.

Aus Behauptung a), b) folgt:

$$0 < \operatorname{Re}(\lambda(x)) \quad \text{und} \quad 0 < \operatorname{Re}(\kappa(x)) \quad , \text{ also gilt c).}$$

Da symmetrische Matrizen stets reelle Eigenwerte haben folgt mit c) die Behauptung d).

□

(4.1.2.5) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Für $x \in (0, h)$ seien $L(x)$ und $C(x)$ gemäß Lemma (4.1.2.3) gegeben. Ferner sei für $x \in (0, h)$ und $\mu \in \mathbb{C}$:

$$Q(x, \mu) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C(x)^{-1} \\ L(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C}^{2k, 2k}$$

Behauptungen:

Für $x \in (0, h)$ gilt:

a) $\det(Q(x), 0) = 1$,

b) Ist

$$\mu(x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \underline{e}(x) := \begin{pmatrix} e_1(x) \\ e_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k} \setminus \{0\}$$

eine Lösung des Eigenwertproblems

$$Q(x, \mu) \underline{e} = 0 ,$$

so ist

$$\lambda(x) := (\mu(x))^2 \in \mathbb{C} , \quad \underline{z}(x) := \underline{e}_1(x) \in \mathbb{R}^k$$

Lösung des Eigenwertproblems

$$(L(x)C(x) - \lambda) \underline{z} = 0 .$$

c) Ist

$$\lambda(x) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad \underline{z}(x) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$$

eine Lösung des Eigenwertproblems

$$(L(x)C(x) - \lambda) \underline{z} = 0 \quad ,$$

so sind

$$\mu^{(1)}(x) := \sqrt{\lambda(x)} \quad \text{mit} \quad \underline{e}^{(1)} := \begin{pmatrix} z(x) \\ -\sqrt{\lambda(x)} \underline{z}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k}$$

und

$$\mu^{(2)}(x) := -\sqrt{\lambda(x)} \quad \text{mit} \quad \underline{e}^{(2)} := \begin{pmatrix} z(x) \\ \sqrt{\lambda(x)} \underline{z}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k}$$

Lösungen des Eigenwertproblems

$$Q(x, \mu) \underline{e} = 0 \quad .$$

Beweis:

Vorbemerkung: Nach Folgerung (4.1.2.4) c) sind $L(x)$ und $C(x)$ für $x \in (0, h)$ invertierbar.

zu Behauptung a):

$$\det(Q(x), 0) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \quad \square$$

zu Behauptung b):

$$Q(x, \mu(x)) \underline{e}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & \mu(x)C(x)^{-1} \\ \mu(x)L(x)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1(x) \\ \underline{e}_2(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{e}_1(x) + \mu(x) C(x)^{-1} \underline{e}_2(x) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(x) L(x)^{-1} + \underline{e}_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{e}_1(x) - \mu(x)^2 C(x)^{-1} L(x)^{-1} \underline{e}_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow (L(x) C(x) - \mu(x)^2) \underline{e}_1(x) = 0 \quad \square$$

zu Behauptung c):

Setze $\underline{e}_1^{(1)}(x) := \underline{z}(x)$, $\underline{e}_2^{(1)}(x) := -\sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} \underline{z}(x)$, dann folgt:

$$Q(x, \sqrt{\lambda(x)}) \begin{pmatrix} \underline{e}_1^{(1)}(x) \\ \underline{e}_2^{(1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \sqrt{\lambda(x)} C(x)^{-1} \\ \sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}(x) \\ \sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} \underline{z}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{z}(x) - \sqrt{\lambda(x)}^2 C(x)^{-1} L(x)^{-1} \underline{z}(x) \\ \sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} \underline{z}(x) - \sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} \underline{z}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C(x)^{-1} L(x)^{-1} (L(x) C(x) - \lambda(x) \underline{z}(x)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad , \quad \text{da} \quad \lambda(x) \in \mathbb{R}^+ .$$

$$\text{Mit } \underline{e}_1^{(2)}(x) := \underline{z}(x) \quad , \quad \underline{e}_2^{(2)}(x) := \sqrt{\lambda(x)} L(x)^{-1} \underline{z}(x) = -\underline{e}_2^{(1)}(x)$$

erhält man damit auch

$$Q(x, -\sqrt{\lambda(x)}) \begin{pmatrix} \underline{e}_1^{(2)}(x) \\ \underline{e}_2^{(2)}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Anmerkung: Ist $L(x)C(x)$ symmetrisch und positiv definit, so gilt für alle Eigenwerte $\lambda(x)$ von $L(x)C(x)$:
 $\lambda(x) \in \mathbb{R}^+ . \quad \square$

Mit Hilfe der obigen Folgerung läßt sich nun das System partieller Differentialgleichungen aus Lemma (4.1.2.) diagonalisieren, falls geeignete Symmetrie- und Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllt sind. Die diagonalisierte Form von (4.1.2.3) a), b) wird zur Bestimmung der Form der zu stellenden Randbedingungen herangezogen. Man erhält:

(4.1.2.5) SATZ:

Voraussetzungen:

Es gelten die Voraussetzungen (4.1.2.2). Für $x \in [0, h]$, $h > 0$, seien $C(x)$, $L(x)$, $G(x)$, $R(x)$ gemäß Lemma (4.1.2.3) definiert. Es gelte ferner:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & C, L \in C^1([0, h], \mathbb{R}^{k, k}), \\ & G, R \in C([0, h], \mathbb{R}^{k, k}) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \forall_{x \in [0, h]} : C(x)L(x) \text{ symmetrisch und positiv definit,}$$

$$0 < \lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_k(x)$$

seien die Eigenwerte von $C(x)L(x)$ für $x \in [0, h]$ und

$$e_1(x), \dots, e_k(x) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \text{ mit } \|e_j(x)\|_2 = 1 \quad (j=1, \dots, k)$$

seien die zugehörigen Eigenvektoren, es sei

$$E(x) := (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{R}^{k, k}.$$

c) Für $x \in [0, h]$ sei

$$N(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1(x)^{-1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k(x)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$D(x) := \frac{1}{2} (X(x)^{-1} G(x) + R(x) L(x)^{-1}) \in \mathbb{R}^{k, k},$$

$$V(x) := \frac{1}{2} (C(x)^{-1} G(x) - R(x) L(x)^{-1}) \in \mathbb{R}^{k, k},$$

$$T(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E(x)^{-1} & -E(x)^{-1} L(x) N(x) \\ E(x)^{-1} & E(x)^{-1} L(x) N(x) \end{pmatrix},$$

$$S(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E(x) & E(x) \\ -N(x)^{-1} L(x)^{-1} E(x) & N(x)^{-1} L(x)^{-1} E(x) \end{pmatrix}$$

d) $\Omega := (0, h) \times (0, T]$, $T > 0$.

Behauptungen:

a) $\lambda_j \in C^1([0, h], \mathbb{R}^+)$ und $E \in C^1([0, h], \mathbb{R}^{k, k})$ und

$\det(E(x)) \neq 0$ für $x \in [0, h]$.

b) $\forall_{x \in [0, h]} : \det(T(x)) \neq 0$ und $T^{-1}(x) = S(x)$

c) $\begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{1} \end{pmatrix} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{2k})$

ist Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C(x)^{-1} \\ L(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} C(x)^{-1} G(x) & 0 \\ 0 & L(x)^{-1} G(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{i} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

auf Ω genau dann, wenn

$$\underline{w} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{2k}) \quad \text{mit} \quad \underline{w}(x, t) := T(x) \begin{pmatrix} \underline{p}(x, t) \\ \underline{i}(x, t) \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
 (**) \quad & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \underline{w} + \begin{pmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & -N(x) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \underline{w} \\
 & + \left\{ \begin{pmatrix} E(x)^{-1} & 0 \\ 0 & E(x)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(x) & V(x) \\ V(x) & D(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x) & 0 \\ 0 & E(x) \end{pmatrix} \right. \\
 & \left. - \begin{pmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & -N(x) \end{pmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial x} T(x) \right] S(x) \right\} \cdot \underline{w} = 0
 \end{aligned}$$

auf Ω ist.

Beweis:

zu Behauptung a):

Da $C(x)L(x)$ für $x \in [0, h]$ positiv definit und symmetrisch ist, gilt o.E. $0 < \lambda(x) \leq \dots \leq \lambda_k(x)$ und die Eigenvektoren

$\underline{e}_1(x), \dots, \underline{e}_k(x)$ sind linear unabhängig; also gilt $\det(E(x)) \neq 0$ [vgl. (61), §14]. Durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Eigenwertgleichung

$$\det(C(x)L(x) - \lambda(x)) = 0$$

und anschließend bei gegebenem Eigenwert $\lambda(x)$ auf die Gleichung

$$[C(x)L(x) - \lambda(x)]\underline{e}(x) = 0$$

erhält man dann die stetige Differenzierbarkeit von $\lambda_j(x)$ und $\underline{e}_j(x)$ für $x \in [0, h]$. □

zu Behauptung b):

Mit $E(x)E(x)^{-1} = I$ [siehe Voraussetzung b)] folgt durch nachrechnen:

$$T(x)S(x) = I \quad \text{und} \quad S(x)T(x) = I$$

[vgl. hierzu auch Folgerung (4.1.2.5)] . □

zu Behauptung c):

Nach Behauptung a) und Voraussetzung a), c) folgt

$$T \in C^1([0, h], \mathbb{R}^{2k, 2k}) .$$

Sind $\begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{1} \end{pmatrix}$, $\underline{w} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{2k})$ mit $\underline{w} = T(x) \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{1} \end{pmatrix}$, so erhält man

dann für $(x, t) \in \Omega$ mit Behauptung b):

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \underline{w}(x, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} T(x) \right] \begin{pmatrix} \underline{p}(x, t) \\ \underline{i}(x, t) \end{pmatrix} + T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{p}(x, t) \\ \underline{i}(x, t) \end{pmatrix} \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} T(x) \right] S(x) \underline{w}(x, t) + T(x) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{p}(x, t) \\ \underline{i}(x, t) \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Nach Folgerung (4.1.2.5) und Voraussetzung c) gilt $x \in [0, h]$:

$$2) \quad T(x) \begin{pmatrix} 0 & C(x)^{-1} \\ L(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} S(x) = \begin{pmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & -N(x) \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned}
 T(x) \begin{pmatrix} C(x)^{-1} G(x) & 0 \\ 0 & L(x)^{-1} G(x) \end{pmatrix} S(x) &= \\
 = \begin{pmatrix} E(x)^{-1} & 0 \\ 0 & E(x)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(x) & V(x) \\ V(x) & D(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x) & 0 \\ 0 & E(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\underline{w} = T(x) \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix}$ und mit 1), 2) erhält man

$$\begin{aligned}
 3) \quad T(x) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} + T(x) \begin{pmatrix} 0 & C(x)^{-1} \\ L(x)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} \\
 + T(x) \begin{pmatrix} C(x)^{-1} G(x) & 0 \\ 0 & L(x)^{-1} G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} \\
 = T(x) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S(x) \frac{\partial}{\partial t} T(x) \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} + T(x) \begin{pmatrix} 0 & C(x)^{-1} \\ L(x) & 0 \end{pmatrix} S(x) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix} \\
 + T(x) \begin{pmatrix} C(x)^{-1} G(x) & 0 \\ 0 & L(x)^{-1} G(x) \end{pmatrix} S(x) T(x) \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \underline{w} + \begin{pmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & -N(x) \end{pmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \underline{w} - \left[\frac{\partial}{\partial x} T(x) \right] S(x) \underline{w} \right\} \\ + \begin{pmatrix} E(x)^{-1} & 0 \\ 0 & E(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(x) & V(x) \\ V(x) & D(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x) & 0 \\ 0 & E(x) \end{pmatrix} \underline{w}$$

Da durch $\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \rightarrow \underline{w} := T(x) \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}$ nach Behauptung b) eine Bijektion auf $C^1(\Omega, \mathbb{R}^{2k})$ erklärt ist, folgt schließlich aus 3) die Behauptung. $\square$

(4.1.2.6) BEMERKUNGEN :

Die Komponenten $\lambda_j(x)^{-1/2}$ ($j=1, \dots, k$) der Diagonalmatrix $N(x)$ beschreiben die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von TEM-Wellen auf dem System der k gekoppelten Bandleitungen aus (4.1.2.1) an der Stelle $x \in [0, h]$. Das Integral

$$\int_0^h N(x) \cdot x \, dx$$

gibt dann die Signallaufzeiten der einzelnen Leitungen an.

Durch $Z(x) := L(x)N(x)$ sind dann die charakteristischen Impedanzen des Leistungssystems definiert, $D(x)$ enthält die dämpfenden Verlustkoeffizienten und $V(x)$ enthält die verzerrenden Verlustkoeffizienten.

4.2 Sachgemäße Anfangs-Randwertprobleme für die cross-talk-Gleichungen

Zur Charakterisierung der Ausbreitung und Reflexion von Singularitäten von (Distributions-)Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen wurden von L. Hörmander et. al. allgemeinere Operatoren, die sog. Pseudodifferentialoperatoren und der Begriff der Wellenfront einer Distribution eingeführt. In Abschnitt 4.2.1 werden wichtige Ergebnisse der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren zusammengefaßt, soweit sie für die Formulierung des Satzes von Hörmander und für die Beschreibung von Reflexionseigenschaften strikt hyperbolischer Operatoren erforderlich sind. In Abschnitt 4.2.2 wird dann ein im Sinne von Kreiss sachgemäßes Anfangs-Randwertproblem für die cross-talk-Gleichungen formuliert, welches das Reflexionsverhalten des Leitungssystems an den Verbindungen zu den angeschlossenen Schaltungselementen wiedergibt. Durch eine Semidiskretisierung dieses Anfangs-Randwertproblems bzgl. der Raumvariablen gewinnt man schließlich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das mit der Waveform Relaxation gelöst werden kann.

4.2.1 Elemente der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren

Differentialoperatoren lassen sich, wenn man sich auf den Raum der Schwartz-Funktionen einschränkt, durch Anwendung der Fourier-Transformation als Integraloperatoren darstellen, deren Kerne

Polynome sind. Eine Erweiterung der zulässigen Integralkerne auf C^∞ -Funktionen, die sich im Unendlichen wie Polynome verhalten, führt zum Begriff der Pseudodifferentialoperatoren (Abk.: PSDO), wie ihn L. Hörmander (24) eingeführt hat. Die Integralkerne vom PSDO'n werden als "Symbole" bezeichnet.

Zur Definition von PSDO'n sei die Fourier-Transformation als stetiger Isomorphismus auf dem Raum $S(\mathbb{R}^n)$ der Schwartz-Funktionen betrachtet:

$$(Fu)(\underline{\xi}) := \hat{u}(\underline{\xi}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle} \underline{w}(\underline{x}) d\underline{x} \quad 1)$$

und

$$(F^{-1}u)(\underline{x}) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle} \hat{u}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad ,$$

wobei $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) := \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \forall_{\alpha, \beta} : \sup_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha u(\underline{x})| < \infty\}$,
 $i := \sqrt{-1}$.

Für den Differentialoperator (zum Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$)

$$D^\alpha := (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad 2)$$

erhält man dann:

$$(D^\alpha u)(\underline{\xi}) = \underline{\xi}^\alpha \hat{u}(\underline{\xi})$$

1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

2) Für den Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ist $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$
 und $\underline{\xi}^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ für $\underline{\xi} := (\xi_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

Für den allgemeineren Differentialoperator

$$Q(\underline{x}, D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{x}) D^\alpha \quad \text{mit} \quad a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

ergibt sich somit [vgl. (40), p. 19, 20]:

$$Q(\underline{x}, D) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} e^{i \langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{x}) \underline{\xi}^\alpha \right) \hat{u}(\underline{\xi}) \, d\underline{\xi} \quad ,$$

d.h. $P(\underline{x}, D)$ wird durch das "Symbol" $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{x}) \underline{\xi}^\alpha$ bestimmt.

Allgemeiner erhält man:

(4.2.1.1) DEFINITION : [vgl. (40), p. 20]:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $m \in \mathbb{R}$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ beliebige Multiindizes.

a) $S^m(\Omega)$ sei dann definiert als die Menge aller $q \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta : \quad \forall k < \infty : \quad \exists C > 0 : \quad \forall (\underline{x}, \underline{\xi}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : \\ \left| D_{\underline{x}}^\beta D_{\underline{\xi}}^\alpha q(\underline{x}, \underline{\xi}) \right| \leq C (1 + |\underline{\xi}|)^{m - |\alpha|} \end{aligned}$$

und

$$\tau > 0 : \quad \forall (\underline{x}, \underline{\xi}) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \quad q(\underline{x}, \tau \cdot \underline{\xi}) = \tau^m q(\underline{x}, \underline{\xi})$$

1)

1) derartige Symbole heißen "homogen in $\underline{\xi}$ vom Grad m "

b) Der lineare Operator

$$Q(\underline{x}, D) : C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

$$u \rightarrow (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle} q(\cdot, \underline{\xi}) \hat{u}(\underline{\xi}) d\underline{\xi}$$

heißt "Pseudodifferentialoperator" der Ordnung m , falls gilt:

$$q \in S^m(\Omega) .$$

Schreibweise: $Q \in PS^m(\Omega)$.

(4.2.1.2) BEMERKUNGEN :

a) Hier wird eine recht spezielle Definition angegeben, die jedoch für die Anwendungen in dieser Arbeit ausreicht. Allgemeinere Symbolklassen und PSDO-Klassen werden z.B. von Hörmander angegeben [siehe (24), Definition (1.1.1) und (1.4.1)] .

b) Gilt für einen PSDO Q mit dem Symbol q

$$\forall_{m \in \mathbb{N}} : q \in S^{-m}(\Omega) ,$$

so schreibt man auch

$$q \in S^{-\infty}(\Omega) \text{ und } Q \in PS^{-\infty}(\Omega) .$$

In diesem Fall wird Q als "glättender PSDO" bezeichnet [vgl. (40), p.20,21].

c) Um PSDO'n verknüpfen zu können, muß ihr Definitionsbereich geeignet erweitert werden. Man erhält nach Hörmander [siehe (24), p. 103]:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{R}$, $Q \in \text{PS}^m(\Omega)$ und sei

$$D'(\Omega) := \{U : C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : U \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)\}$$

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} U \varphi$$

der Raum der regulären Distributionen auf Ω . Dann gilt:

Es gibt einen glättenden PSDO $R \in \text{PS}^{-\infty}(\Omega)$ und einen Operator $\tilde{Q} \in \text{PS}^m(\Omega)$ so daß $Q = \tilde{Q} + R$ und

$$\tilde{Q} : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

stetig ist und zu einem stetigen Operator (bzgl. der auf $D'(\Omega)$ üblichen Topologie)

$$\tilde{Q} : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$$

erweitert werden kann.

d) PSDO'n lassen sich in analoger Weise für matrixwertige Symbole definieren.

Im Folgenden werden - insbesondere im Hinblick auf eine Charakterisierung des Verhaltens von PSDO'n am Rand $\partial\Omega$ von Ω -
Distributionslösungen einer PSDO-Gleichung

(4.2.1.4) SATZ : [Eigenschaften der Wellenfront, siehe (40), p.43]

Voraussetzungen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in D'(\Omega)$, $Q \in \mathcal{PS}^m(\Omega)$ und $(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Behauptungen:

a) $WF(u)$ ist konisch [d.h. $\forall (\underline{x}, \underline{\xi}) \in WF(u) : \forall \tau > 0 : (\underline{x}, \tau \underline{\xi}) \in WF(u)$]

und abgeschlossen.

b) $(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \notin WF(u) \Rightarrow (\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \notin WF(Qu)$.

Im Folgenden werden nun Pseudodifferentialgleichungen der Form

$$(4.2.1.5) \quad Qu = f$$

betrachtet, wobei der PSDO Q und die rechte Seite f folgendes erfüllen sollen:

(4.2.1.6) VORAUSSETZUNGEN :

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ sei ein Gebiet und für $Q : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$ gelte:

$$Q \in \mathcal{PS}^m(\Omega) \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{R}^+.$$

Für das Symbol $q \in S^m(\Omega)$ von Q gelte:

Es gibt eine Folge $(q_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ von Symbolen ¹⁾, so daß

1) $\{q_j\}$ nennt man "asymptotische Entwicklung" von q ,
 q_0 heißt Hauptsymbol von Q , vgl. hierzu (40), p.20.

$$\forall_{j \in \mathbb{N}_0} : q_j \in S^{m-j}(\Omega)$$

und

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} : (q - \sum_{j=0}^{i-1} q_j) \in S^{m-i}(\Omega) ,$$

$$\forall_{(\underline{x}, \underline{\xi}) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})} : q_0(\underline{x}, \underline{\xi}) \in \mathbb{R} .$$

Für die rechte Seite von (4.2.1.5) gelte:

$$f \in D'(\Omega) .$$

Nach Satz (4.2.1.4) sind die Singularitäten von Q_0 Teilmenge der Singularitäten einer Distributionslösung $u \in D'(\Omega)$ der Gleichung (4.2.1.5). Mit Hilfe von Bicharakteristiken, die durch das Hauptsymbol q_0 von Q definiert sind, beschreibt Hörmander die Ausbreitung der Singularitäten der Distributionslösung u .

(4.2.1.7) DÉFINITION : [siehe (40), p.44]

Es gelten für die Gleichung (4.1.2.5) die Voraussetzungen (4.1.2.6)

$$\Gamma := \{(\underline{x}(s), \underline{\xi}(s)) : s \in I\} \subset \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

heißt "O-Bicharakteristik (Abk.: O-B.C.) von Q ",
wenn gilt :

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $0 \in I$ und

$(\underline{x}, \underline{\xi}) \in C^1(I, \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ist (eindeutig bestimmte)

Lösung der sog. "Hamilton-Jacobi-Gleichungen"

$$\dot{\underline{x}} = \nabla_{\underline{\xi}} q_0(\underline{x}, \underline{\xi}) \quad , \quad \dot{\underline{\xi}} = -\nabla_{\underline{x}} q_0(\underline{x}, \underline{\xi})$$

mit

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad , \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0 \quad ,$$

wobei

$$(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad \text{und} \quad q_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) = 0 \quad \text{gelte.}^{1)}$$

(4.2.1.8) BEMERKUNG :

Jede Lösung $w \in C^1(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$ der durch den sog. "Hamilton-Operator"

$$H_Q := \langle \nabla_{\underline{\xi}} q_0, \nabla_{\underline{x}} \rangle - \langle \nabla_{\underline{x}} q_0, \nabla_{\underline{\xi}} \rangle$$

zu $Q \in \mathcal{PS}^m(\Omega)$ definierten Gleichung $H_Q w = 0$ ist konstant gleich Null längs jeder O-B.C. Γ von Q [vgl. (40), p.44].

(4.2.1.9) SATZ von HÖRMANDER : [siehe (24), Theorem 6.1.1]

Voraussetzungen:

Gegeben sei Gleichung (4.2.1.5) mit den Voraussetzungen (4.1.2.6).

1) Bei Matrix-PSDO'n ist anstelle von $q_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) = 0$ die Bedingung $\det(iq_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0)) = 0$ zu fordern.

Sei $\Gamma \subset \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ eine O-B.C. von Q , so daß gilt:

$$\forall_{(\underline{x}, \underline{\xi}) \in \Gamma} : \quad \forall_{\underline{\xi}} \quad q_0(\underline{x}, \underline{\xi}) \neq 0.$$

Sei $(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \in \Gamma$ und $u \in D'(\Omega)$ eine Lösung von (4.2.1.5)

Behauptung:

$$(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0) \in WF(u) \setminus WF(f) \Rightarrow \Gamma \subset WF(u) \setminus WF(f).$$

Ist $WF(f) = \emptyset$ (d.h. $f \in D'(\Omega)$ hat einen C^∞ -Kern), so breiten sich nach dem Satz von Hörmander die Singularitäten einer Lösung $u \in D'(\Omega)$ der Gleichung (4.2.1.5) längs der O-Bicharakteristiken aus. Die obigen Ausführungen beziehen sich auf das Innere des Gebietes Ω . Um Aussagen über das Verhalten einer Lösung $u \in D'(\Omega)$ am Rand $\partial\Omega$ von Ω zu erhalten, betrachtet man nun den Satz von Hörmander folgend die O-B.C.'n des Operators Q auf $\partial\Omega$: Sie lassen sich dort in sog. reflektierte Familien von O-B.C.'n zusammenfassen, deren Elemente "einlaufende" bzw. "auslaufende" Differentiationsrichtungen repräsentieren. Grundlage einer derartigen Charakterisierung ist eine Diagonalisierung des Hauptsymbols q_0 von Q , die bei (strikt) hyperbolischen Operatoren auf ein der Gleichung (4.2.1.5) zugeordnetes Eigenwertproblem gestützt ist [vgl. hierzu Taylor (53), Abschnitt 2; Engquist u. Majda (14), Abschnitt 2 und Higdon (21), Abschnitt 4]. Reflexionseigenschaften von Pseudodifferentialoperatoren wurden nach diesem Vorgehen erstmalig von Taylor (53) und Engquist,

Majda (14) analysiert und zur Konstruktion sog. absorbieren-
der Randbedingungen herangezogen.

Am Rand eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gelten nun folgende

(4.2.1.10) VORAUSSETZUNGEN :

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \neq \emptyset$. Für jedes $\underline{x} \in \partial\Omega$
gibt es eine offene Umgebung $U(\underline{x})$ und ein $\phi_{\underline{x}} \in C^1(U(\underline{x}), \mathbb{R})$,
so daß gilt:

$$\forall \underline{z} \in U(\underline{x}) : \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{z}) \neq 0 ,$$

$$\forall \underline{z} \in U(\underline{x}) \cap \Omega : \phi_{\underline{x}}(\underline{z}) > 0 ,$$

$$S(\underline{x}) := \partial\Omega \cap U(\underline{x}) = \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n : \phi_{\underline{x}}(\underline{z}) = 0 \}$$

b) Der Operator $Q \in \text{PS}^m(\Omega)$, $m > 0$, erfüllt die Vorausset-
zungen (4.2.1.6) und für jedes $\underline{x} \in \partial\Omega$ ist $S(\underline{x})$ "nicht-
charakteristisch für Q ", d.h. für das Hauptsymbol $q_0 \in S^m(\Omega)$
von Q gilt:

$$\forall \underline{z} \in S(\underline{x}) : q_0(\underline{z}, \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{z})) = 0 \quad 1)$$

1) Bei Matrix-PSDO'n ist hier $\det(-iq_0(\underline{z}, \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{z}))) = 0$ zu
setzen.

c) Ist $\underline{x}_0 \in S(\underline{x})$ und $\underline{\xi}_0 \in \text{span}(\nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))^{\perp} \setminus \{0\}$ (für ein beliebiges $\underline{x} \in \partial\Omega$), so hat $q_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0 + \tau \cdot \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))$ nur die einfachen und reellen Nullstellen $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Reflektierte Familien von O-B.C.'n von Q am Rand $\partial\Omega$ von Ω erhält man nun durch Zuordnung der einzelnen O-Bicharakteristiken von Q zu den Nullstellen $\tau_1, \dots, \tau_k$:

(4.2.1.11) DEFINITION [vgl. (40), pp.47,48]

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $Q \in \text{PS}^m(\Omega)$ gegeben, so daß die Voraussetzungen (4.2.1.12) erfüllt sind.

Sei $\underline{x} \in \partial\Omega$ und $\underline{x}_0 \in S(\underline{x})$, $\underline{\xi}_0 \in \text{span}(\nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))^{\perp} \setminus \{0\}$.

$\tau_1, \dots, \tau_k$ seien die reellen einfachen Nullstellen von $q_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0 + \tau \cdot \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))$ [bzw. von $\det(-iq_0(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0 + \tau \cdot \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))$, falls Q ein Matrix-PSDO ist).

a) Für $j=1, \dots, k$ sei nun $\Gamma_j \subset \bar{\Omega} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definiert als diejenige "halbe" O-B.C. von Q durch den Punkt

$(\underline{x}_0, \underline{\xi}_0 + \tau_j \cdot \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0))$, deren Projektion in $\bar{\Omega}$ liegt, d.h.

$$\begin{aligned} \Gamma_j &:= \{ (\underline{x}(s), \underline{\xi}(s)) : s \in I_j \}, \text{ wobei} \\ (\underline{x}, \underline{\xi}) &\text{ Lösung des Anfangswertproblems} \\ \dot{\underline{x}} &= \nabla_{\underline{\xi}} q_0(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{\xi}} &= -\nabla_{\underline{x}} q_0(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0 + \tau_j \nabla \phi_{\underline{x}}(\underline{x}_0) \end{aligned}$$

auf dem Intervall I_j ist und $I_j := (-\varepsilon_j, 0]$ bzw.

$I_j = [0, \varepsilon_j]$ mit geeignetem $\varepsilon_j > 0$ so gewählt wird, daß $\Phi(\underline{x}(s)) > 0$ für $s \in I_j \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

$\{\Gamma_j\}_{j=1, \dots, k}$ heißt dann "reflektierte Familie von O-B.C. von Q zum Punkt $(\underline{x}_0, \xi_0)$ ".

b) Ist durch $t \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ eine "Zeitvariable" erklärt, so daß $\forall t(\underline{z}) \neq 0$ für $\underline{z} \in \bar{\Omega}$ gilt (d.h. t injektiv), und ist $x \in \partial\Omega$ derart gewählt, daß für $\underline{z} \in S(\underline{x})$ stets $\forall t(\underline{z}) \in \text{span}(\nabla \Phi_{\underline{x}}(\underline{z}))^\perp$ erfüllt ist ¹⁾, so heißt Γ_j

"auslaufend in $\underline{x}_0$ " , falls $\dot{\Phi}_{\underline{x}}(\underline{x}_0) \dot{t}(\underline{x}_0) < 0$

"einlaufend in $\underline{x}_0$ " , falls $\dot{\Phi}_{\underline{x}}(\underline{x}_0) \dot{t}(\underline{x}_0) > 0$

auf $I_j \setminus \{0\}$ ist.

Anhand eines einfachen Beispiels, das den cross-talk-Gleichungen aus Abschnitt 4.1.2 entspricht, sollen nun die oben dargestellten Begriffe erläutert und der hier angestrebten Anwendung zugänglich gemacht werden:

1) d.h. das Randstück $S(\underline{x})$ ist nur durch "Raumkoordinaten" bestimmt.

2) $\dot{}$ bezeichnet hier die Ableitung nach $S \in I_j$.

(4.2.1.12) BEISPIEL :

Sei

$$\Omega := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \Phi_{(0,t)}(x,t) > 0 \quad \wedge \quad \Phi_{(x,0)}(x,t) > 0 \right\},$$

$$Q := Q(x,t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) := \frac{\partial}{\partial \xi} - A \frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{PS}^1(\Omega),$$

wobei

$$\Phi_{(0,t)}(x,t) := x, \quad \Phi_{(x,0)}(x,t) := t,$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k} \quad \text{mit}$$

$$a_{jj} \neq 0, \quad a_{ii} \neq a_{jj} \quad \text{für } i \neq j.$$

Dann gilt:

Q hat das Symbol (hier zugleich Hauptsymbol)

$$q_0(x,t,\xi,\tau) = i\xi - A i\tau = i\tau(I - A \frac{\tau}{\xi}) \quad \text{für } \xi > 0,$$

d.h. $q_0 \in \mathcal{S}^1(\Omega)$ [vgl. Definition (4.2.1.1)].

Für den Rand $\partial\Omega$ von Ω gilt dann [vgl. (4.2.1.10)] :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_x \cup \partial\Omega_t \cup \{(0,0)\}$$

$$\partial\Omega_x := \{(x,t) : \Phi_{(0,t)}(x,t) = 0, \quad x > 0\},$$

$$\partial\Omega_t := \{(x,t) : \Phi_{(x,0)}(x,t) = 0, \quad t > 0\},$$

Für $(0, t) \in \partial\Omega_x \subset \partial\Omega$ gilt:

$$\det(-iq_0(0, t, \nabla\phi(0, t))(0, t))) = \det(-iq_0(0, t, 1, 0))$$

$$= \det(I) = 1 \neq 0.$$

Für $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in \partial\Omega_x$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{span}(\nabla\phi(0, t))(0, t))^\perp = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp$ gilt:

$$\det(-iq_0(0, t, \xi_j, 1)) = 0 \Leftrightarrow \xi_j = a_{jj} \quad \text{für } j=1, \dots, k.$$

Die reflektierte Familie von O-B.C. im Punkt $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist dann mit den Lösungen der AWP's

$$\dot{x}_j = 1, \quad x_j(0) = 0$$

$$\dot{t}_j = a_{jj}, \quad t_j(0) = t$$

$$\dot{\xi}_j = 0, \quad \xi_j(0) = \xi_j$$

$$\dot{\tau}_j = 0, \quad \tau_j(0) = 1$$

durch $\Gamma_j := \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_j(s) \\ t_j(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_j(s) \\ \tau_j(s) \end{pmatrix} \right) : s \geq 0 \right\}$ für $j=1, \dots, k$

gegeben.

Mit $s \rightarrow 0$ erhält man schließlich:

$$\dot{\phi}(0, t)(0, t, \xi_j, 1) \cdot \dot{t}(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{x}_j(s) \cdot \dot{t}_j(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} 1 \cdot a_{jj} =$$

$$= a_{jj} = \xi_j \quad \text{für } j=1, \dots, k.$$

D.h. Γ_j ist einfallende O-B.C. von Q , falls sie durch $\xi_j = a_{jj}$ mit $a_{jj} < 0$ bestimmt ist und Γ_j ist ausfallende O-B.C. von Q falls sie durch $\xi_j = a_{jj}$ mit $a_{jj} > 0$ bestimmt ist.

(4.2.1.13) BEMERKUNGEN zu Beispiel (4.2.1.12) :

Q ist ein "strikt hyperbolischer Operator" [vgl. (26), Definition (1.1)]. Falls das Hauptsymbol nicht Diagonalform hat wie in Beispiel (4.2.1.12), kann es durch Transformation mit einem elliptischen PSDO diagonalisiert werden [vgl. Taylor (53), Abschnitt 2].

4.2.2 Charakterisierung von Reflexionseigenschaften an den Enden der Bandleitungen

H.-O. Kreiss (26) untersucht, unter welchen Bedingungen Anfangs-Randwertprobleme für strikt hyperbolische Systeme sachgemäß gestellt sind, d.h. unter welchen Voraussetzungen sie eindeutig lösbar sind und die Lösung stetig (bzgl. der L^2 -Norm) von den Anfangswerten, den Randwerten und den Anregungstermen des Differentialgleichungssystems abhängt. Er gibt für die Sachgemäßheit in (26) eine Reihe von notwendigen bzw. hinreichenden algebraischen Bedingungen an, die auf ein dem Differentialgleichungssystem zugeordnetes Eigenwertproblem gegründet sind.

Nach [(26), Abschnitt I] und [(27), Abschnitt 15] können sachgemäße Anfangs-Randwertprobleme für strikt hyperbolische Systeme in einer Raumdimension wie folgt charakterisiert werden:

(4.2.2.1) SATZ :

Voraussetzungen:

Sei auf dem Gebiet

$$\Omega := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0 \}$$

das strikt hyperbolische System

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{w} = \Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} \underline{w} + \underline{f}(x, t) \quad \text{mit}$$

$$\Lambda(x) := \begin{pmatrix} \Lambda^I(x) & 0 \\ 0 & \Lambda^{II}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\Lambda^I(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{ll}(x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{II}(x) := \begin{pmatrix} a_{l+1, l+1}(x) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$a_{jj} \in C(\mathbb{R}_O^+, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad a_{jj}(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } j=1, \dots, l \\ > 0 & \text{für } j=l+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\underline{f} \in L^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

betrachtet.

Dazu seien die Anfangsbedingung

$$b) \quad \underline{w}(x, 0) = \underline{a}(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \underline{a} \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n)$$

und die Randbedingungen in der Form

$$c) \quad \underline{w}^I(0, t) = H \cdot \underline{w}^{II}(0, t) + \underline{g}(t) \quad , \quad t > 0 \quad \text{mit}$$

$$H \in \mathbb{R}^{1, n-1} \quad , \quad \underline{g} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^1) \quad ,$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{w}^I \\ \underline{w}^{II} \end{pmatrix} \quad \text{gemäß der Partitionierung von } A \quad ,$$

gegeben.

Behauptung:

Das Anfangs-Randwertproblem a), b), c) ist sachgemäß im Sinne von Kreiss, d.h. für $T > 0$ ist

$$\begin{aligned} & \| \underline{w}(0, \cdot) \|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^n)}^2 + \| \underline{w}(\cdot, \cdot) \|_{L^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}^2 \\ & \leq k(T) \cdot \{ \| \underline{f} \|_{L^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}^2 + \| \underline{g} \|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^1)}^2 \} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 4.2.1 lassen sich nun Reflexionseigenschaften der Bedingungen an dem durch $x = 0$ definierten Randstück von Ω beschreiben.

(4.2.2.2) SATZ :

Voraussetzungen:

Gegeben sei das Anfangs-Randwertproblem (4.2.2.1) a), b), c),
wobei für die Koeffizienten der Matrix $A(x)$ gelte:

$$a_{ii}(0) \neq a_{jj}(0) \quad \text{für } i \neq j, \quad i, j=1, \dots, n.$$

Sei $\{\Gamma_j\}_{j=1, \dots, n}$ die reflektierte Familie von O-B.C. des Operators

$$Q(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) := \frac{\partial}{\partial x} - A^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial t} - A^{-1}(x) f(x, t)$$

zum Punkt $(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \in \bar{\Omega} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und es gelte:

$$(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \notin WF(g) \quad .$$

Dabei seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ die zu den negativen Eigenwerten $\frac{1}{a_{11}(0)}, \dots, \frac{1}{a_{ll}(0)}$ bestimmten einfallenden O-B.C. und

$\Gamma_{l+1}, \dots, \Gamma_{nn}$ die zu den positiven Eigenwerten

$\frac{1}{a_{l+1, l+1}(0)}, \dots, \frac{1}{a_{nn}(0)}$ bestimmten ausfallenden O-B.C. von

Q [vgl. Beispiel (4.2.1.12)].

Sei $\underline{w} \in D'(\Omega)$ eine Distributionslösung von (4.2.2.1) a), b), c).

Behauptung:

$$\Gamma_j \notin WF(\underline{w}) \quad \text{für } j=l+1, \dots, n \Rightarrow \Gamma_j \notin WF(\underline{w}) \quad \text{für } j=1, \dots, l.$$

Beweis:

Siehe Taylor (53), Abschnitt 5, Proposition 5.1 . $\square$

Taylor beweist in [(53), Abschnitt 5] eine zu Satz (4.2.2.2) analoge Aussage für allgemeinere Randbedingungen

$$B \underline{w} \Big|_{x=0} = \underline{g} \quad \text{mit} \quad B \in PS^0(\partial\Omega) \quad , \quad \underline{g} \in D'(\partial\Omega)$$

unter der Voraussetzung, daß Sachgemäßigkeit im Sinne von Kreiss gewährleistet ist. Die Sachgemäßigkeit eines Anfangs-Randwertproblems für ein strikt hyperbolisches Randwertproblem ist also hinreichend dafür, daß an dem durch $x=0$ definierten Randstück von Ω keine Singularitäten erzeugt werden (d.h. die Lösung $\underline{w} \in D'(\Omega)$ ist glatt längs der einfallenden O-B.C. , falls die Lösung $\underline{w}$ glatt längs der ausfallenden O-B.C. von Q war). Gilt für eine einfallende O-B.C. $\Gamma_j \subset WF(\underline{w})$, so kann nach Satz (4.2.2.2) die Lösung $\underline{w}$ nicht glatt längs aller ausfallenden O-B.C. von Q gewesen sein, d.h.

$$\exists_{i \in \{1, \dots, n\}} : \Gamma_i \subset WF(\underline{w}) \quad .$$

In diesem Fall spricht man von Reflexion von Singularitäten einer Lösung $\underline{w}$ am Rand von Ω .

(4.2.2.3) FOLGERUNG :

Voraussetzungen:

Mit den Voraussetzungen (4.1.2.2) seien die cross-talk-Gleichungen gemäß Lemma (4.1.2.3) a), b) gegeben. Es gelte ferner:

a) $C, L \in C^1([0, h], \mathbb{R}^{k, k})$,

$G, R \in C([0, h], \mathbb{R}^{k, k})$,

$$\forall_{x \in [0, h]} : \begin{cases} C(x)L(x) \text{ symmetrisch, positiv definit} \\ \text{mit paarweise verschiedenen Eigenwerten} \\ \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x) \end{cases}$$

b) Für $x \in [0, h]$ sei

$$N(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1(x)^{-1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k(x)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

c) $H_0, H_h \in \mathbb{R}^{k, k}$ Diagonalmatrizen , $\underline{g}_0, \underline{g}_h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^k)$

$Z_0 := L(0) \cdot N(0)$, $Z_h := L(h)N(h)$,

$\underline{p}_0, \underline{i}_0 \in C([0, h], \mathbb{R}^k)$, $T > 0$.

Behauptung:

Mit den Randbedingungen

a) $(I - H_0) \underline{p}(0, t) = (I + H_0) Z_0 \underline{i}(0, t) + \underline{g}_0(t)$, $t > 0$,

$(I + H_h) \underline{p}(h, t) = (I - H_h) Z_h \underline{i}(h, t) + \underline{g}_h(t)$, $t > 0$,

und den Anfangsbedingungen

$$b) \quad \underline{p}(x, 0) = \underline{p}_0(x) \quad , \quad \underline{i}(x, 0) = \underline{i}_0(x) \quad , \quad x \in [0, h]$$

ist zu den cross-talk-Gleichungen auf $\bar{\Omega} := [0, h] \times [0, T]$ ein im Sinne von Kreiss sachgemäßes Problem gestellt.

Beweis:

Nach Satz (4.1.2.5) läßt sich das System (4.1.2.3) a), b) mit der Transformation $\underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{pmatrix} = T(x) \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix}$ auf $\bar{\Omega}$ diagonalisieren. Satz (4.2.2.1) liefert dann mit

$$\underline{w}_1(0, t) = H_0 \underline{w}_2(0, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} \underline{g}_0(t) \quad \text{für } t > 0 ,$$

$$\underline{w}_2(0, t) = H_h \underline{w}_1(0, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} E(h)^{-1} \underline{g}_h(t)$$

$$\underline{w}(x, 0) = T(x) \begin{pmatrix} \underline{p}_0(x) \\ \underline{i}_0(x) \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in [0, h] ,$$

ein sachgemäßes Anfangs-Randwertproblem. Nach Definition von $T(x)$ [vgl. Satz (4.1.2.5), Voraussetzung c)] folgt dann:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} \underline{p}(0, t) - \frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} L(0)N(0)\underline{i}(0, t)$$

$$= H_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} \underline{p}(0, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} L(0)N(0)\underline{i}(0, t) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} \underline{g}_0(t)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} E(0)^{-1} \underline{p}(h, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} E(h)^{-1} L(h)N(h)\underline{i}(h, t)$$

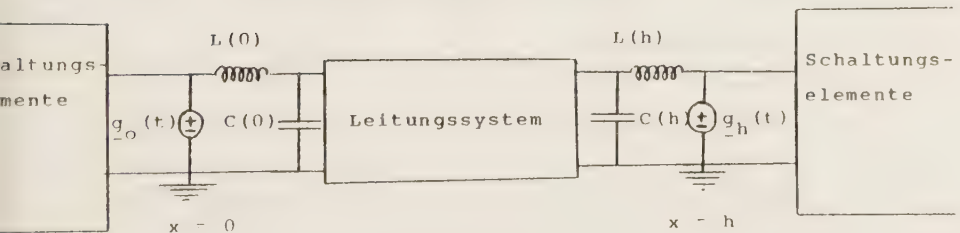
$$= H_h \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} E(h)^{-1} \underline{p}(h, t) - \frac{1}{\sqrt{2}} E(h)^{-1} L(h)N(h)\underline{i}(h, t) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} E(h)^{-1} \underline{g}_h(t)$$

für $t > 0$.

Da nach Vor. c) H_0, H_h Diagonalmatrizen sind, folgt daraus durch Multiplikation mit $\sqrt{2}E(0)$ bzw. $\sqrt{2}E(h)$ die Behauptung. $\square$

(4.2.2.4) BEMERKUNG :

Durch $\underline{g}_0$ und $\underline{g}_h$ sind bei $x=0$ bzw. $x=h$ Eingangssignale (d.h. Ausgangsspannungen der angeschlossenen Schaltungselemente) gegeben, während durch die Matrizen H_0, H_h die Reflexion an den Enden des Leitungssystems charakterisiert wird. Sind $H_0, H_h = 0 \in \mathbb{R}^{k,k}$, so liegt an den Verbindungen des Leitungssystems zu den entsprechenden Elementen der gegebenen Schaltung keine Reflexion vor. Den obigen Randbedingungen entspricht eine Ersatzschaltung für die Enden der Leitungen mit folgender Form:



4.2.3 Einbettung der cross-talk-Simulation in die Schaltungssimulation

In exemplarischer Weise soll hier kurz angedeutet werden, wie durch eine Diskretisierung der cross-talk-Gleichungen mit ihren Anfangsbedingungen und Randbedingungen bezüglich der Raumvariablen x ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert werden kann, das die Anwendung des AWR-Verfahrens erlaubt.

Auf $\Omega := \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ seien dazu gemäß Lemma (4.1.2.3) die cross-talk-Gleichungen in der Form

$$0 = \underline{P} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u}, \frac{\partial}{\partial x} \underline{u}, \underline{u}, x \right) \\
= \begin{pmatrix} C(x) & 0 \\ 0 & L(x) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \underline{u} + \begin{pmatrix} G(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{pmatrix} \underline{u} \\
\text{wobei } \underline{u} := \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{i} \end{pmatrix},$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen aus Folgerung (4.2.2.3) gegeben. Ferner sei durch

$$0 := x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} := h$$

eine Diskretisierung des Intervalls $[0, h]$ definiert. Sei

$$I^\# := \{x_0, \dots, x_{m+1}\} \quad \text{und} \quad \partial I^\# := \{x_0, x_{m+1}\}$$

und seien P_i ($i=1, \dots, k$) die Komponenten von $\underline{P}$. Für

Für $t \in (0, T]$, $x_j \in I^\# \setminus \partial I^\#$ sei dann

$$p_{ij}^\#(\underline{v}^{[j]}(t), \underline{v}^{[j-1]}(t), \underline{v}^{[j]}(t), \underline{v}^{[j+1]}(t), x_j) \\ := p_i(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v}^{[j]}(t), \frac{\underline{v}^{[j-1]}(t) - \underline{v}^{[j+1]}(t)}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \underline{v}^{[j]}(t), x_j),$$

wobei

$$\underline{v}^{[v]}(t) := \underline{u}(x_v, t) \quad \text{für } v \in \{0, 1, \dots, m, m+1\}.$$

Die Werte von $\underline{v}^{[0]}$ und $\underline{v}^{[m+1]}$ sind dabei aus den Randbedingungen bei $x = 0$ bzw. $x = h$ zu gewinnen. Zu den Anfangsbedingungen [vgl. Folgerung (4.2.2.3)]

$$\underline{v}^{[j]}(0) = \begin{pmatrix} p_0(x_j) \\ \underline{1}_0(x_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m,$$

erhält man somit ein System von k Teilsystemen zu je m linearen, impliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$p_{ij}^\#(\underline{v}^{[j]}, \underline{v}^{[j-1]}, \underline{v}^{[j]}, \underline{v}^{[j+1]}, x_j) = 0$$

$$j=1, \dots, m, \quad i=1, \dots, k.$$

Dieses AWP läßt sich durch den AWR-Algorithmus lösen. Wegen seiner Linearität, kann zur Lösung der Teilsysteme die Laplace-Transformation effizient eingesetzt werden [vgl. (25)]. Die derart semidiskretisierten cross-talk-Gleichungen eignen sich bei

Anwendung des AWR-Algorithmus für eine Steuerung der Relaxationsparameter α, ω nach der in Satz (2.1.1.1) angegebenen Formel.

TEIL 5 : TESTBEISPIELE

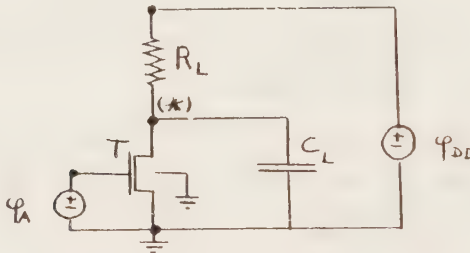
Im Folgenden werden die in Teil 1, Teil 2 und Teil 3 dieser Arbeit hergeleiteten Eigenschaften des AWR-Algorithmus anhand zweier Testbeispiele, der MOSFET-Inverterkette und dem MOSFET-Ringoszillator, überprüft. Diese Beispiele wurden ausgewählt, da sie zum einen typische Elemente von Speicherbausteinen und von Testschaltungen (Ringoszillator) darstellen und zum anderen in einfacher Weise zu beliebig großen Schaltungssystemen erweitert werden können.

Die numerischen Rechnungen wurden auf einer CYBER 170/875 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München durchgeführt.

5.1 Die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von MOSFET-Inverter-Ketten bzw. MOSFET-Ringoszillatoren

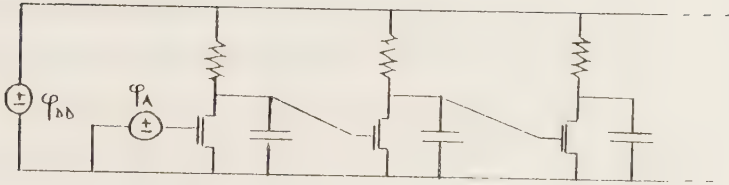
Das Schaltungsbild für einen MOSFET-Invertor kann in folgender Form angegeben werden:

(5.1.1)

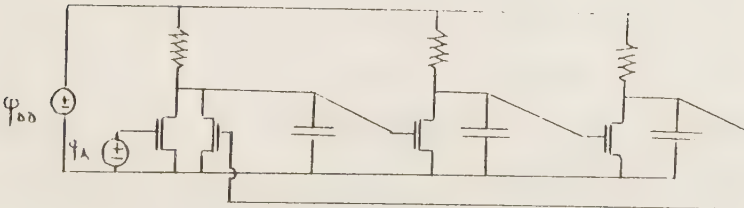


Dabei bezeichne T einen MOSFET (metal oxide field effect transistor), R_L einen Lastwiderstand und C_L eine Lastkapazität. Ein durch φ_A angelegtes Eingangssignal liefert dann am durch (*) bezeichneten Knoten ein "umgekehrtes" Signal. Durch Hintereinanderschaltung mehrerer Inverter erhält man eine Inverterkette, durch Rückkopplung des Ausganges des letzten Inverters einer ungeradzahliglen Inverterkette zum Eingang des ersten Inverters erhält man dann einen MOSFET-Ringoszillator:

(5.1.2) MOSFET-Inverter-Kette:

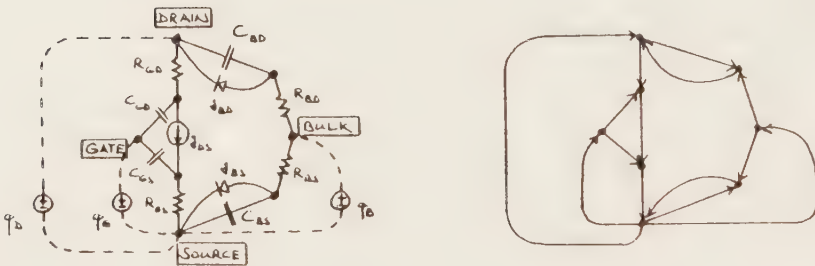


(5.1.3) MOSFET-Ringoszillator (3-stufig)



Die MOSFET's werden dabei nach dem Modell von Shichman und Hodges [siehe (48)] durch folgende Ersatzschaltung wiedergegeben:

(5.1.4) SHICHMAN-HODGES-Modell für den MOSFET mit dem zugehörigen gerichteten Graphen gemäß Abschnitt 3.1.1.:



Dabei bezeichnet

- C_{GD} die gate-drain -Kapazität,
- C_{GS} die gate-source-Kapazität,
- C_{BD} die bulk-drain -Kapazität,
- C_{BS} die bulk-source-Kapazität,
- R_{GD} den gate-drain -Widerstand,
- R_{GS} den gate-source-Widerstand,
- R_{BD} den bulk-drain -Widerstand,
- R_{BS} den bulk-source-Widerstand,

g_{BD} die bulk-drain -Stromfunktion,
 g_{BS} die bulk-source-Stromfunktion und
 g_{DS} die drain-source-Stromfunktion.

In diesem Modell sind C_{BD} , C_{BS} , g_{BD} , g_{BS} , g_{DS} spannungsge-
 steuerte Größen. Nach [(48), bzw. (35), p. A2.37 - A2.43] sind
 diese Funktionen in Abhängigkeit der Klemmenspannungen v_{DS} ,
 v_{GS} , v_{BS} , v_{GD} , v_{BD} wie folgt definiert:

(5.1.5) DRAIN-SOURCE-Strom:

$$g_{DS}(v_{DS}, v_{GS}, v_{BS}, v_{GD}, v_{BD}) := \begin{cases} g_{DS}^+(v_{DS}, v_{GS}, v_{BS}) & , \text{ falls } \chi v_{DS} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \chi v_{DS} = 0 \\ g_{DS}^-(v_{DS}, v_{GD}, v_{BD}) & , \text{ falls } \chi v_{DS} < 0 \end{cases}$$

wobei

g_{DS}^+ , g_{DS}^- wie folgt definiert sind:

(5.1.5.1) $\chi v_{DS} > 0$ (forward region) :

$$g_{DS}^+(v_{DS}, v_{GS}, v_{BS}) := \begin{cases} 0 & , \text{ für } \chi v_{GS} - v_{TE} \leq 0 \\ -\chi \beta (\chi v_{GS} - v_{TE})^2 (1 + \delta \chi v_{DS}) & , \text{ für } 0 < \chi v_{GS} - v_{TE} \leq \chi v_{DS} \\ -\chi \beta \chi v_{DS} [2 (\chi v_{GS} - v_{TE}) - \chi v_{DS}] & \cdot [1 + \delta \chi v_{DS}] & , \text{ für } \chi v_{DS} < \chi v_{GS} - v_{TE} \end{cases}$$

$$\text{mit } v_{TE} = \mu v_{TO} + \gamma(\sqrt{\varphi - \chi v_{BS}} - \sqrt{\varphi})$$

(5.1.5.2) $\chi v_{DS} < 0$ (backward region):

$$g_{DS}^-(v_{DS}, v_{GD}, v_{BD}) :=$$

$$\begin{cases} 0 & , \text{ für } \chi v_{GD} - v_{TE} \leq 0 \\ -\chi \beta (\chi v_{GD} - v_{TE})^2 (1 - \delta \chi v_{DS}) & , \text{ für } 0 < \chi v_{GD} - v_{TE} \leq -\chi v_{DS} \\ \chi \beta \chi v_{DS} [2 (\chi v_{GD} - v_{TE}) + \chi v_{DS}] \cdot \\ \quad \cdot [1 - \delta \chi v_{DS}] & , \text{ für } -\chi v_{DS} < \chi v_{GD} - v_{TE} \end{cases}$$

$$\text{mit } v_{TE} = \mu v_{TO} + \gamma(\sqrt{\varphi - \chi v_{BD}} - \sqrt{\varphi})$$

(5.1.5.3) Es werden dabei folgende Modellparameter (mit typischen Werten) verwendet:

$$v_{T0} = 1.0 \text{ [V] (Schwellenspannung)}$$

$$\beta = 0.000031 \text{ [A/V}^2\text{]}$$

$$\gamma = 0.37 \text{ [V}^{1/2}\text{]}$$

$$\delta = 0.02 \text{ [1/V]}$$

$$\varphi = 0.65 \text{ [V]}$$

$$\chi = \begin{cases} +1 : \text{ n-channel-MOSFET} \\ -1 : \text{ p-channel-MOSFET} \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} +1 : \text{ enhancement-mode} \\ -1 : \text{ depletion-mode} \end{cases}$$

(5.1.6) BULK-Ströme (Dioden-Ströme):

$$g_{BS}(v_{BS}) = \chi \cdot i_s \left[\exp\left(\frac{\chi v_{BS}}{v_{TH}}\right) - 1 \right] \quad \text{für } \chi v_{BS} \leq 0,$$

$$g_{BD}(v_{BD}) = -\chi \cdot i_s \left[\exp\left(\frac{\chi v_{BD}}{v_{TH}}\right) - 1 \right] \quad \text{für } \chi v_{BD} \leq 0,$$

mit

$$i_s = 1.0 \cdot 10^{-15} \text{ [A]} \quad (\text{Sättigungsstrom})$$

$$v_{TH} = 0.02585 \text{ [V]} \quad (\text{thermische Spannung})$$

(5.1.7) DIODEN-Kapazitäten C_{BS}, C_{BD} :

$$C_{BS} = C_{BS0} \sqrt{1 - \frac{\chi v_{BS}}{\phi_B}} \quad \text{für } \chi v_{BS} \leq 0$$

$$C_{BD} = C_{BD0} \sqrt{1 - \frac{\chi v_{BD}}{\phi_B}} \quad \text{für } \chi v_{BD} \leq 0$$

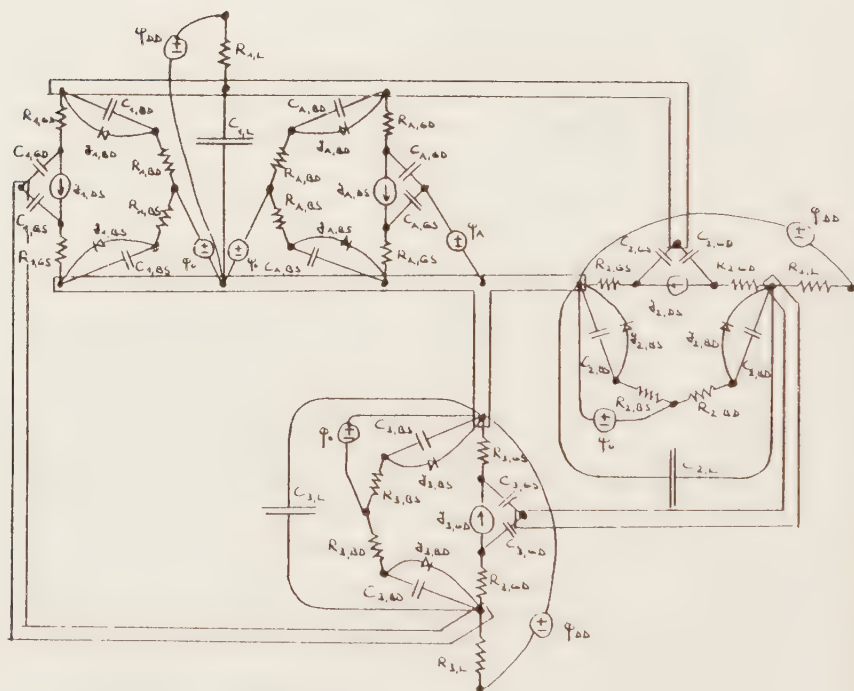
mit

$$C_{BS0} = C_{BD0} = 2.4 \cdot 10^{-14} \text{ [f]}$$

$$\phi_B = 0.87 \text{ [V]}$$

Einsetzen des Shichman-Hodges-Modells (5.1.4) für MOSFET's in den durch (5.1.3) gegebenen Ringoszillator liefert dann die Schaltung (5.1.8) mit ihrem gerichteten Graphen (5.1.9) und der zugehörigen Inzidenzmatrix $\tilde{A}$ in (5.1.10).

(5.1.8) RINGOSZILLATOR aus 3 MOSFET-INVERTERN:



(5.1.10) INZIDENZMATRIX $\tilde{A}$ zum Graphen (5.1.9):

$$\tilde{A} \in J^{20,58}, \quad J := \{-1, 0, 1\},$$

$$A = (A_1, A_2) \in J^{19,58} \text{ (reduzierte Inzidenzmatrix)}$$

	$E_C^{(1)}$	$E_C^{(2)}$	$E_C^{(3)}$	$\tilde{E}_{IVS}^{(1)}$	$\tilde{E}_{IVS}^{(2)}$	$\tilde{E}_{IVS}^{(3)}$	$E_R^{(1)}$	$E_R^{(2)}$	$E_R^{(3)}$	$E_{VOCS}^{(1)}$	$E_{VOCS}^{(2)}$	$E_{VOCS}^{(3)}$
N_0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$K_C^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_C^{(2)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_C^{(3)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_{IVS}^{(1)} \sim I_{IVS}^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_{IVS}^{(2)} \sim J_{IVS}^{(2)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_{IVS}^{(3)} \sim J_{IVS}^{(3)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A_1
 A_2

Mit den Bezeichnungen aus (5.1.8) und der Nummerierung der 20 Knoten und der 58 Kanten gemäß (5.19) erhält man dann nach Abschnitt 3.1 folgendes System von 19 impliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines 3-stufigen MOSFET-Ringoszillators:

(5.1.11) RINGOSZILLATOR-GLEICHUNGEN :

$$.1) \quad C_{1,GS} \dot{p}_1 - C_{1,GS} \dot{p}_{19} +$$

$$+ \frac{1}{R_{1,GS}} p_1 + g_{1,DS} (p_2 - p_1, p_{19} - p_1, p_3, p_{19} - p_2, p_4 - p_5) = 0$$

$$.2) \quad C_{1,GD} \dot{p}_2 - C_{1,GD} \dot{p}_{19} +$$

$$+ \frac{1}{R_{1,GD}} p_2 - \frac{1}{R_{1,GD}} p_5 - g_{1,DS} (p_2 - p_1, p_{13} - p_1, p_3, p_{19} - p_2, p_4 - p_5) = 0$$

$$.3) \quad C_{1,BS} (p_3) \dot{p}_3 + \frac{1}{R_{1,BS}} p_3 - g_{1,BS} (p_3) = 0$$

$$.4) \quad C_{1,BD} (p_4 - p_5) \dot{p}_4 - C_{1,BD} (p_4 - p_5) \dot{p}_5 + \frac{1}{R_{1,BD}} p_4 - g_{1,BD} (p_4 - p_5) = 0$$

$$.5) \quad -C_{1,BD} (\dots) \dot{p}_4 + [C_{1,BD} (\dots) + C_{1,L} + C_{A,BD} (\dots) + C_{2GS} + C_{2,GD}] \dot{p}_5 -$$

$$-C_{A,BD} (\dots) \dot{p}_9 - C_{2,GS} \dot{p}_{10} - C_{2,GD} \dot{p}_{11} =$$

$$- \frac{1}{R_{1,GD}} p_2 - \frac{1}{R_{A,GD}} p_7 + \left[\frac{1}{R_{1,GD}} + \frac{1}{R_{1,L}} + \frac{1}{R_{A,GD}} \right] p_5 +$$

$$+ g_{1,BD} (p_4 - p_5) + g_{A,BD} (p_3 - p_5) - \frac{1}{R_{1,L}} \varphi_{DD} = 0$$

$$.6) \quad C_{1,GS} \dot{p}_6 - C_{A,GS} \dot{\varphi}_A +$$

$$+ \frac{1}{R_{A,GS}} p_6 + g_{A,DS} (p_7 - p_6, \varphi - p_6, p_8, \varphi - p_7, p_9 - p_5) = 0$$

$$.7) \quad C_{A,GD} \dot{p}_7 - C_{A,GD} \dot{\varphi}_A +$$

$$+ \frac{1}{R_{A,GD}} p_7 - \frac{1}{R_{A,GD}} p_5 - g_{A,DS} (p_7 - p_6, \varphi - p_6, p_8, \varphi - p_7, p_9 - p_5) = 0$$

$$.8) \quad C_{A,BS} (p_8) \dot{p}_8 + \frac{1}{R_{A,BD}} (p_7 - p_5) - g_{A,BD} (p_8) = 0$$

$$.9) \quad C_{A,BD} (p_9 - p_5) \dot{p}_9 - C_{A,BD} (p_9 - p_5) \dot{p}_5 + \frac{1}{R_{A,BD}} p_9 - g_{A,BD} (p_9 - p_5) = 0$$

$$.10) \quad C_{2,GS} \dot{p}_{10} - C_{2,GS} \dot{p}_5 +$$

$$+ \frac{1}{R_{2,GS}} + g_{2,DS} (p_{11} - p_{10}, p_5 - p_{10}, p_{12}, p_5 - p_{11}, p_{13} - p_{14}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 .11) \quad & C_{2,GD} \dot{p}_{11} - C_{2,GS} \dot{p}_5 + \\
 & + \frac{1}{R_{2,GD}} p_{11} - \frac{1}{R_{2,GD}} p_{14} - g_{2,DS} (p_{11} - p_{10}, p_5 - p_{10}, p_{12}, p_5 - p_{11}, \\
 & p_{13} - p_{14}) = 0
 \end{aligned}$$

$$.12) \quad C_{2,BS} (p_{12}) \dot{p}_{12} + \frac{1}{R_{2,BS}} p_{12} - g_{2,BS} (p_{12}) = 0$$

$$.13) \quad C_{2,BD} (p_{13} - p_{14}) \dot{p}_{13} - C_{2,BD} (p_{13} - p_{14}) \dot{p}_{14} + \frac{1}{R_{2,BD}} p_{13} - g_{2,BD} (p_{13} - p_{14}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 .14) \quad & -C_{2,BD} (\dots) \dot{p}_{13} + [C_{2,BD} (\dots) + C_{2,L} + C_{3,GD}] \dot{p}_{14} - \\
 & - \frac{1}{R_{2,GD}} p_{11} + [\frac{1}{R_{2,GD}} + \frac{1}{R_{2,L}}] p_{14} + g_{2,BD} (p_{13} - p_{14}) - \frac{1}{R_{2,L}} \varphi_{DD} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 .15) \quad & C_{3,GS} \dot{p}_{15} - C_{3,GD} \dot{p}_{14} + \\
 & + \frac{1}{R_{3,GS}} + g_{3,DS} (p_{16} - p_{15}, p_{14} - p_{15}, p_{17}, p_{14} - p_{16}, p_{18} - p_{19}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 .16) \quad & C_{3,GD} \dot{p}_{16} - C_{3,GD} \dot{p}_{14} + \\
 & + \frac{1}{R_{3,GD}} p_{16} - \frac{1}{R_{3,GD}} p_{19} - g_{3,DS} (p_{16} - p_{15}, p_{14} - p_{15}, p_{17}, p_{14} - p_{16}, \\
 & p_{18} - p_{19}) = 0
 \end{aligned}$$

$$.17) \quad C_{3,BS}(p_{17})\dot{p}_{17} + \frac{1}{R_{3,BS}}p_{17} - g_{3,BS}(p_{17}) = 0$$

$$.18) \quad C_{3,BD}(p_{18}-p_{19})\dot{p}_{18} - C_{3,BD}(p_{18}-p_{19})\dot{p}_{19} + \frac{1}{R_{3,BD}}p_{18} - \\ - g_{3,BD}(p_{18}-p_{19}) = 0$$

$$.19) \quad -C_{3,BD}(\dots)\dot{p}_{18} + [C_{3,BD}(\dots) + C_{3,L} + C_{1,GS} + C_{1,GD}]\dot{p}_{19} - \\ - \frac{1}{R_{3,GD}}p_{16} + [\frac{1}{R_{3,GD}} + \frac{1}{R_{3,L}}]p_{19} + g_{3,BD}(p_{18}-p_{19}) - \frac{1}{R_{3,L}}\varphi_{DD} = 0$$

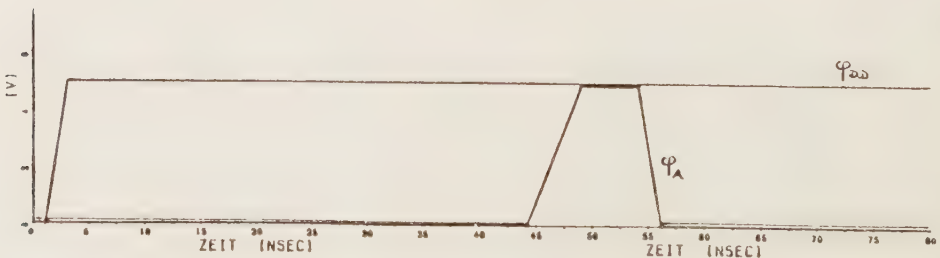
(5.1.12) BEMERKUNGEN zum Gleichungssystem (5.1.11)

a) Die Anfangsbedingung zum System (5.1.11) sind

$$\dot{p}_j(0) = 0 \quad , \quad p_j(0) = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, 19 \quad ,$$

falls $\varphi_{DD}(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_{DD}(0) = 0 \quad , \quad \varphi_A(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_A(0) = 0$.

b) Das Betriebspotential φ_{DD} und das Eingangssignal φ_A werden hier gemäß folgender Abbildung gewählt:



c) Die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer 3-stufigen MOSFET-Inverterkette gemäß Abbildung (5.1.2) erhält man aus dem System (5.1.11), indem die Gleichungen (5.1.11.1), ..., (5.1.11.4) gestrichen werden und die Gleichung (5.1.11.5) durch

$$\begin{aligned} & [C_{1,L} + C_{A,BD}(\dots) + C_{2,GS} + C_{2,GD}] \dot{p}_5 - \\ & - C_{A,BD}(\dots) \dot{p}_5 - C_{2,GS} \dot{p}_{10} - C_{2,GD} \dot{p}_{11} - \\ & - \frac{1}{R_{A,GD}} p_7 + \left[\frac{1}{R_{1,L}} + \frac{1}{R_{A,GD}} \right] p_5 + g_{A,BD} (p_9 - p_5) - \frac{1}{R_{1,L}} \varphi_{DD} = 0 \end{aligned}$$

und die Gleichung (5.1.11.19) durch

$$\begin{aligned} & -C_{3,BD}(\dots) \dot{p}_{18} + [C_{3,BD}(\dots) + C_{3,L}] \dot{p}_{19} - \\ & - \frac{1}{R_{3,GD}} p_{16} + \left[\frac{1}{R_{3,GD}} + \frac{1}{R_{1,L}} \right] p_{19} + g_{3,BD} (p_{18} - p_{19}) - \frac{1}{R_{1,L}} \varphi_{DD} = 0 \end{aligned}$$

ersetzt wird.

d) Die Partitionierung des Gleichungssystems (5.1.11) zur Anwendung des AWR-Verfahrens ist hier in natürlicher Weise durch die einzelnen Inverter gegeben [vgl. Abschnitt 3.1.3]:

1. Teilsystem : Gleichungen (5.1.11.1), ..., (5.1.11.9),
2. Teilsystem : Gleichungen (5.1.11.10), ..., (5.1.11.14),
3. Teilsystem : Gleichungen (5.1.11.15), ..., (5.1.11.19).

Für die Inverterkette wird eine analoge Partitionierung benutzt.

e) Der Ringoszillator (5.1.3) hat nach seiner in (5.1.10) dargestellten Inzidenzmatrix zwei kapazitive Rückkopplungen [vgl. Definition (3.2.2.3)a)] vom Knoten N_{19} des 3. Teilsystems zu den Knoten N_1 und N_2 des 1. Teilsystems.

Die Auswirkung des AWR-Algorithmus auf diese Rückkopplungen sind gemäß Folgerung (3.2.2.6) und Bemerkung (3.2.2.7)a) beschrieben durch

$$\Delta_{19,\{1,2\}}^{(3)} [\underline{x}, \underline{y}] := (\Delta_j)_{j=1(1)5} + \underline{\rho}^{(3)} (\underline{x} - \underline{y}) \quad \text{mit}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0 \quad \text{und}$$

$$\Delta_5 = - \frac{\alpha_1^{(1)}}{\omega_1^{(1)}} C_{1,GS} (\dot{x}_1 - \dot{y}_1) - \frac{\alpha_1^{(2)}}{\omega_1^{(2)}} C_{1,GD} (\dot{x}_2 - \dot{y}_2) ,$$

$\underline{x} := (x_j)_{j=1(1)19}$, $\underline{y} := (y_j)_{j=1(1)19}$ seien dabei Näherungslösungen von (5.1.11), die von zwei aufeinanderfolgenden Relaxationsschritten des AWR-Algorithmus erzeugt werden.

f) Die Schaltungen (5.1.2) und (5.1.3) können durch Zusammenschalten von $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, Inverter-Stufen zu beliebig großen MOSFET-Inverterketten bzw. MOSFET-Ringoszillatoren erweitert werden.

g) Für die Kondensatoren und Widerstände werden

$$C_{j,GS} = C_{j,GD} = 60 \text{ [pf]},$$

$$C_{BSO} = C_{BDO} = 24 \text{ [pf]},$$

$$C_{j,L} = 200 \text{ [pf]},$$

$$R_{j,GS} = R_{j,GD} = 40 \text{ [\Omega]},$$

$$R_{j,BS} = R_{j,BD} = 100 \text{ [\Omega]},$$

$$R_{j,L} = 10\,000 \text{ [\Omega]}$$

verwendet.

h) Die einzelnen Teilsysteme werden mit der Trapezregel gelöst, basierend auf einer äquidistanten Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$, $T = 40 \text{ nsec}$, mit der Schrittweite $T_H = 0.25 \text{ [nsec]}$.

Die daraus resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme werden mit dem Newton-Verfahren gelöst, wobei maximal 4 Newton-Schritte durchgeführt werden solange

$\|\underline{\xi}^{(i)} - \underline{\xi}^{(i-1)}\|_{\infty} > \epsilon_N(\underline{\xi}^{(i)}, \underline{\xi}^{(i-1)})$
 Lösungen des i -ten bzw. $(i-1)$ -ten Newton-Schrittes) mit

$\epsilon_N := 0.005$ gilt.

Für die Waveform-Relaxation ist folgendes Abbruchkriterium gegeben:

$$\max_{t \in [0, T]} \|\underline{p}_i^{(k)}(t) - \underline{p}_i^{(k-1)}(t)\|_{\infty} < \epsilon_R,$$

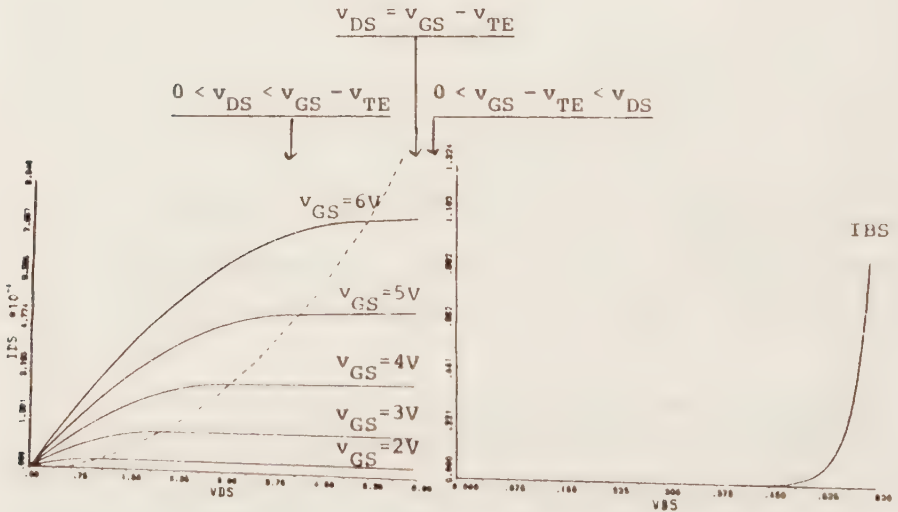
wobei $\underline{p}_i^{(k)} := (\underline{p}_i^{(k)}_{i=1(1)19})$ die im k -ten Relaxationsschritt des

AWR-Algorithmus erzeugte Näherungslösung zum System (5.1.11) sei.

5.2 Testrechnungen für MOSFET-Inverterketten und MOSFET-Ringoszillatoren

Zur Veranschaulichung der spannungsgesteuerten Stromfunktionen des Shichman-Hodges-Modells für MOSTET's seien zunächst die drain-source-Ströme [vgl. 5.1.5] und die Bulk-Ströme [vgl. 5.1.6] dargestellt:

(5.2.1) DS-STRÖME , BS-STROM :



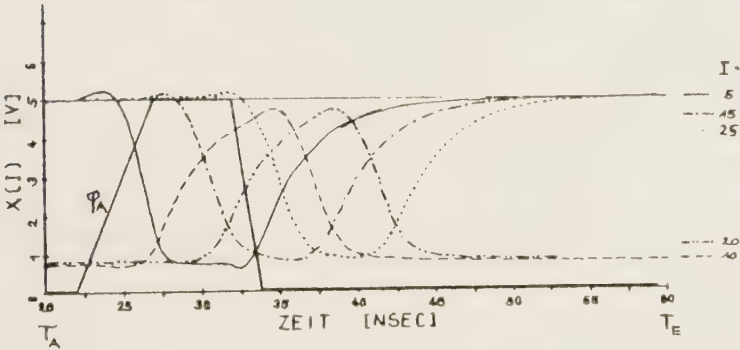
$$I_{DS} = g_{DS}^+(v_{DS}, v_{GS}, v_{BS})$$

$$I_{BS} = g_{BS}(v_{BS})$$

$$\chi = 1, \mu = 1$$

Anhand der Transientenanalyse einer 5-stufigen Kette aus identischen MOSFET-Invertern werden nun numerische Experimente zur Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit des AWR-Algorithmus von den Relaxationsparametern vorgestellt. In Abbildung (5.2.2) sind mit $X(I)$, $I = 5, 10, 15, 20, 25$ die mit dem AWR-Algorithmus an den Knoten $N_5, N_{10}, N_{15}, N_{20}, N_{25}$ den drain-Kontakten der MOSFET's als Reaktion auf das Eingabesignal φ_A erzeugten Lösungen gezeigt.

(5.2.2) MOSFET-INVERTERKETTE (5-stufig)



Die Auswertung der Norm

$$\Delta x := \max_{t \in [T_A, T_E]} \max_{i=1, \dots, 25} |x^{(5)}(i, t) - x^{(4)}(i, t)| \quad [\text{vgl. (5.2.3)}]$$

der Differenz der Lösungen des fünften und des vierten Relaxations-schrittes, berechnet für verschiedene Werte für α, ω mit $\alpha = \omega$,

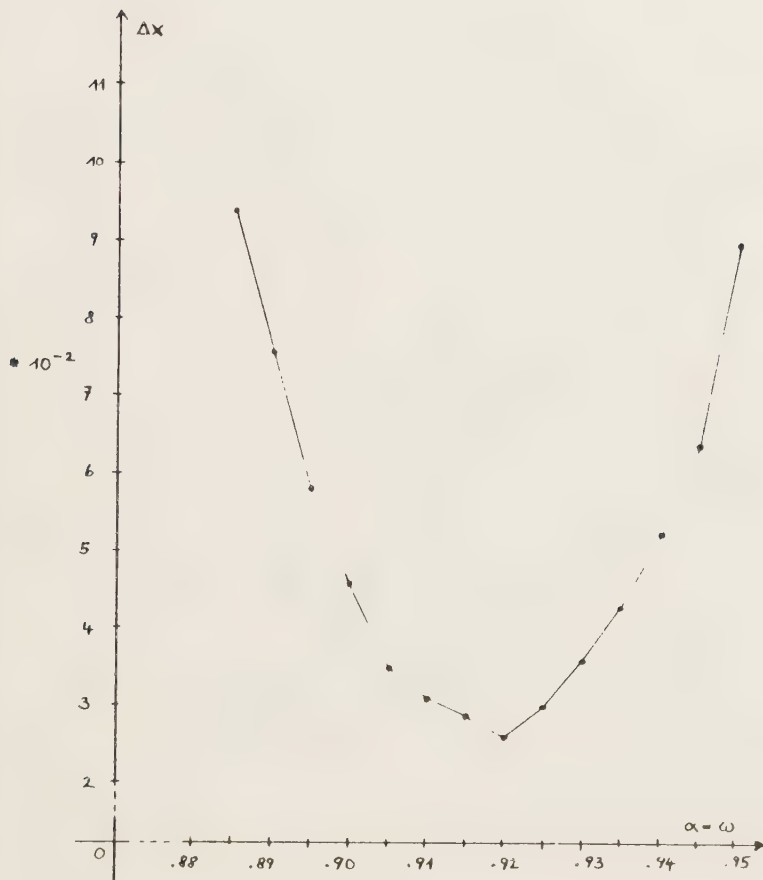
und die Auswertung des "numerischen Kontraktionsfaktors"

$$\lambda := \frac{\max_{t \in [T_A, T_E]} \max_{i=1, \dots, 25} |x^{(k)}(i, t) - x^{(k-1)}(i, t)|}{\max_{t \in [T_A, T_E]} \max_{i=1, \dots, 25} |x^{(k-1)}(i, t) - x^{(k-2)}(i, t)|}$$

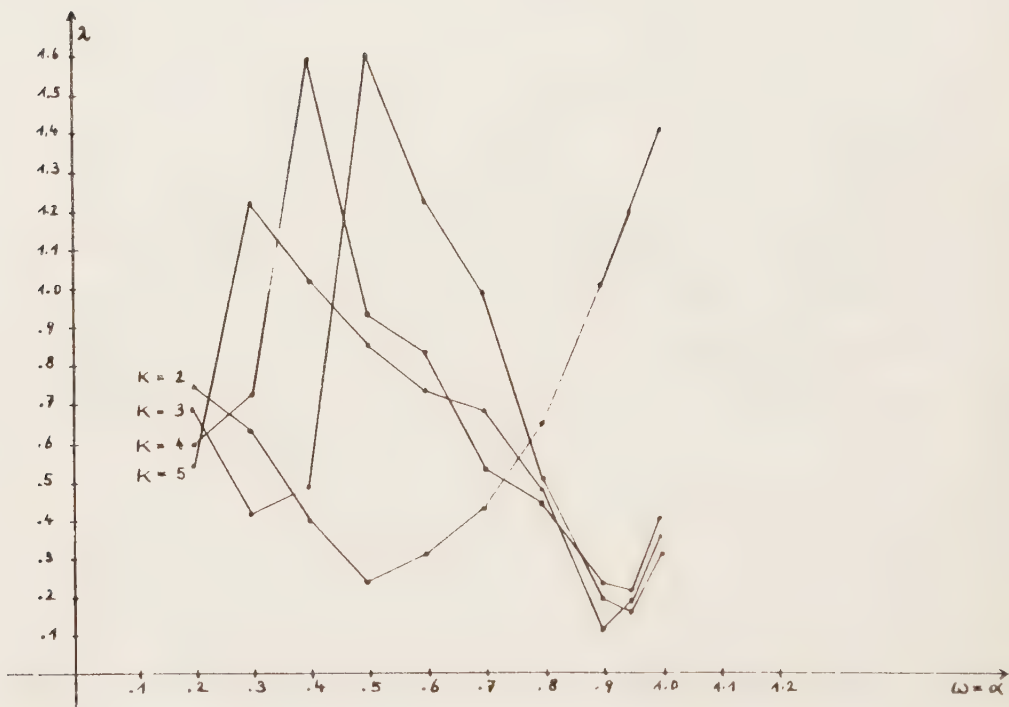
[vgl. (5.2.4), (5.2.5)]

für die Relaxationsschritte $k = 2, 3, 4, 5$ zeigt, daß hier offensichtlich durch $\alpha = \omega$ mit $\omega \approx .92$ eine beträchtliche Konvergenzbeschleunigung zu erzielen ist. Rechenzeitvergleiche ergaben, daß bei diesem Beispiel durch Verwendung der experimentell bestimmten Relaxationsparameter $\alpha = \omega = .92$ gegenüber einer Simulation mit der Parameterwahl $\alpha = \omega = 1$ (GSWR-Algorithmus) ein Rechenzeitgewinn von 32% erzielt wird.

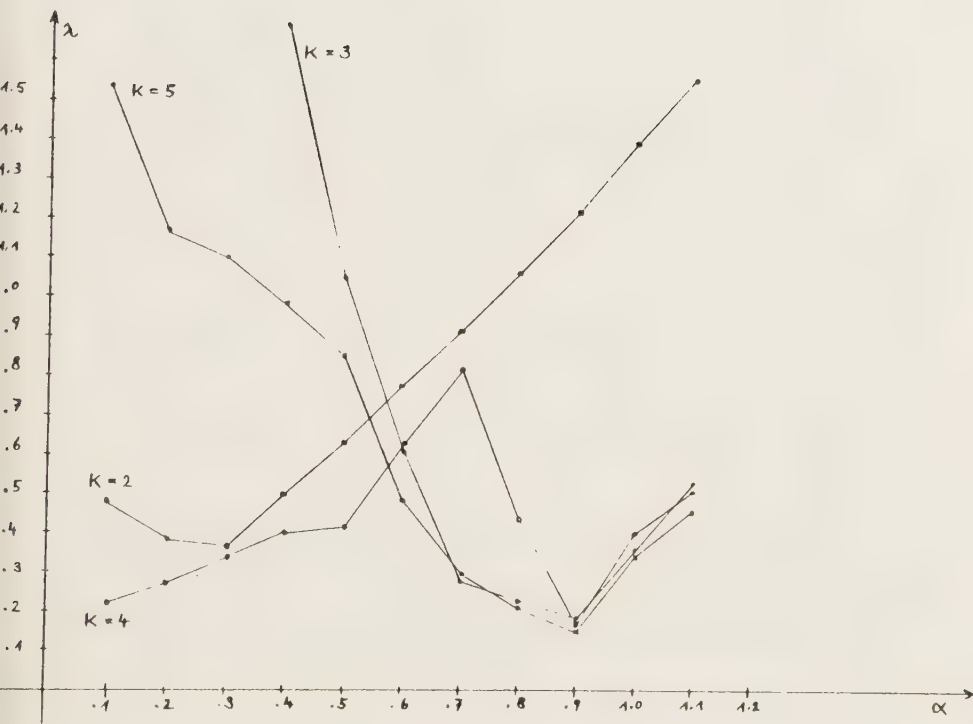
(5.2.3)



(5.2.4) $\alpha = \omega = .1(.1)1.0$

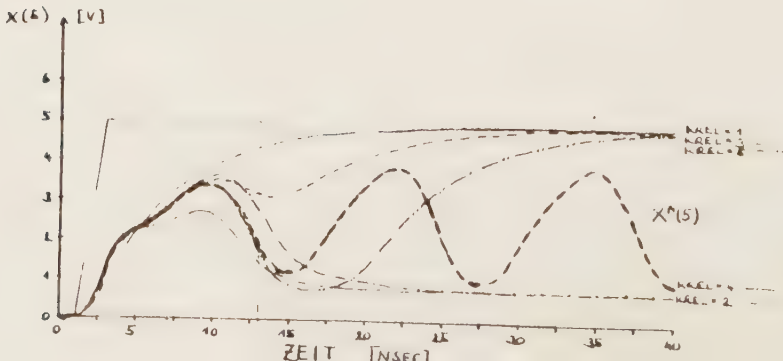


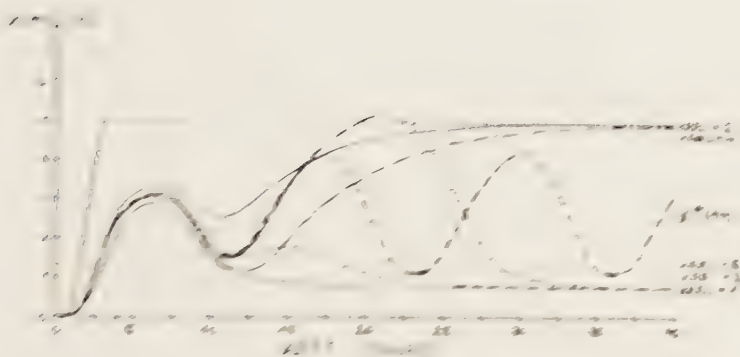
(5.2.5) $\omega = .9$, $\alpha = .1(.1)1.1$



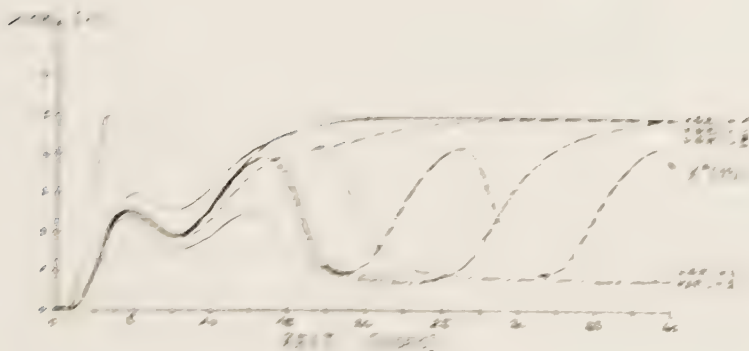
Anhand der Simulation des Einschwingvorganges [Abbildungen (5.2.6), (5.2.7), (5.2.8)] und der Reaktion auf ein Störsignal φ_A [Abbildungen (5.2.9), (5.2.10), (5.2.11)] eines 3-stufigen MOSFET-Ringoszillators lassen sich die im zweiten Konvergenz-satz [siehe Satz (1.2.3.2)] und in Abschnitt 3.2 beschriebenen Konvergenzeigenschaften des AWR-Algorithmus demonstrieren: Die Lösungen an den drain-Kontakten (Knoten N_5, N_{14}, N_{19}) der Transistoren des Ringoszillators für die Relaxationsschritte $KREL = 1, 2, 3, 4, 5$ konvergieren "von links nach rechts", d.h. für kleine Teilintervalle des Intervalls $[T_A, T_E]$ mit $T_A = 0$, $T_E = 40$ nsec bzw. $T_A = 40$ nsec, $T_E = 80$ nsec, gegen die Lösungen $x^*(i)$, $i = 5, 14, 19$; für die Intervalle $[40$ nsec, 80 nsec] und $[80$ nsec, 120 nsec] sind anschließend in den Abbildungen (5.2.12), (5.2.13), (5.2.14), die Terme $\Delta_{19, \{1,2\}}^{(3)} [x^{(9)}, x^{(8)}]$ mit $\frac{\alpha_1^{(1)}}{\omega_1^{(1)}} = \frac{\alpha_1^{(2)}}{\omega_1^{(2)}} = 1$ [vgl. Bemerkung (5.1.12)e)] zur Beschreibung der Auswirkung des AWR-Algorithmus auf die vorliegenden Rückkopplungen dargestellt, wobei $x^{(9)}, x^{(8)}$ Lösungen des 9. bzw. 8. Relaxationsschrittes des AWR-Algorithmus bezeichnen.

(5.2.6)





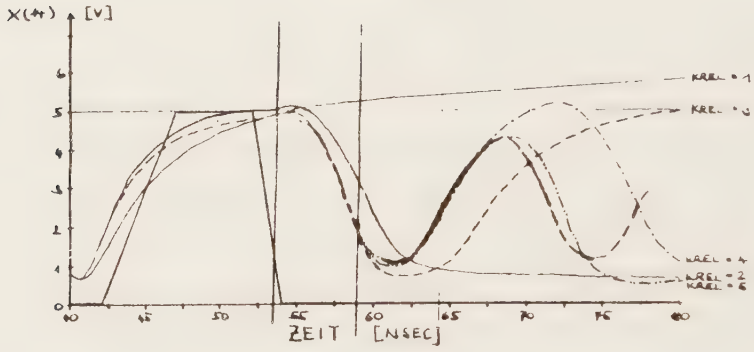
11.2.2



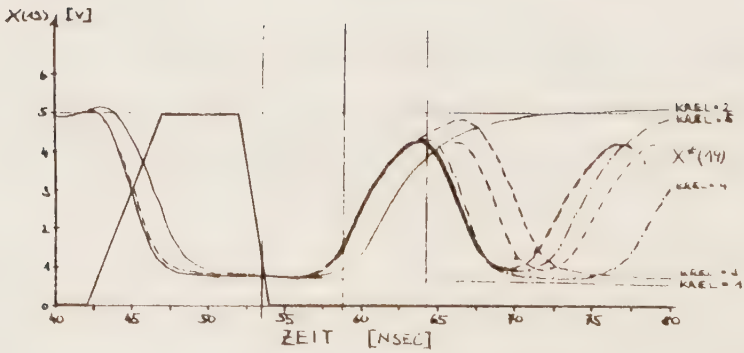
11.2.3



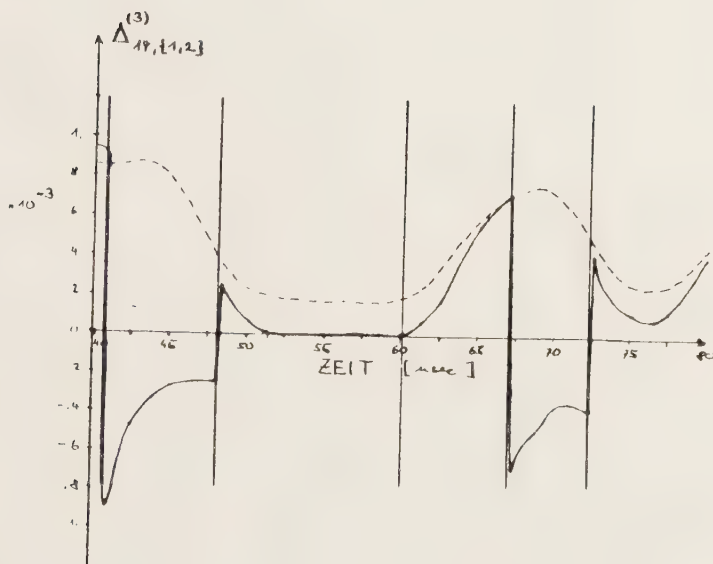
(5.2.10)



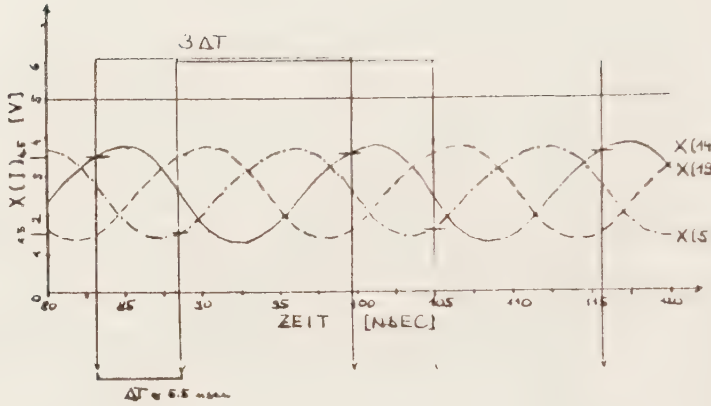
(5.2.11)



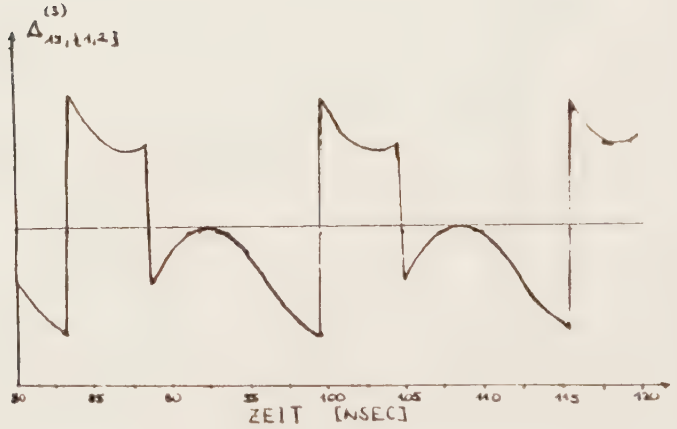
(5.2.12)



(5.2.13)



(5.2.14)



In den Abbildungen (5.2.9), ..., (5.2.13) sind Teilintervalle von $[T_A, T_E]$ eingezeichnet, auf denen offensichtlich schrittweise Konvergenz stattfindet. In Anlehnung an Satz (1.2.3.2) kann somit durch eine Unterteilung des zugrundeliegenden Zeitintervalls in sog. "Zeitfenster" [vgl. (39), p. 518] die Konvergenz des AWR-Verfahrens erheblich beschleunigt werden [vgl. auch Folgerung

(1.2.1.8)]. Dazu folgende Testrechnungen:

In Abbildung (5.2.13) wird das Zeitintervall $[T_A, T_E]$ mit $T_A = 80 \text{ nsec}$, $T_E = 120 \text{ nsec}$ in Zeitfenster zerlegt, die durch geeignete Stützstellen der äquidistanten Zeitdiskretisierung mit der Schrittweite $T_H = 0.25 \text{ nsec}$ definiert sind:

M_{TI} : Anzahl der Zeitfenster

$TF(I) := [T(I-1), T(I)]$:

I-tes Zeitfenster, wobei

$T(I) := T_A + N_{TI}(I) T_H$ für $I = 1(1)M_{TI}$,

$N_{TI}(I) \in \{0, 1, \dots, 160\}$ mit

$0 = N_{TI}(0) < N_{TI}(1) < \dots < N_{TI}(M_{TI}) = 160$,

$\Delta TF(I) := T(I) - T(I-1)$ für $I = 1(1)M_{TI}$,

$KR(I)$: Anzahl der Relaxationsschritte im I-ten Zeitfenster $TF(I)$, die gerechnet werden müssen, bis das Abbruchkriterium aus Bemerkung (5.1.12)h) mit $\epsilon_R := 0.05$ erfüllt ist.

Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen zusammengefaßt:

(5.2.14) $M_{TI} = 4$:

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	13	$13 T_H$	4
2	78	$65 T_H$	7
3	142	$64 T_H$	7
4	160	$18 T_H$	4

(5.2.15) $M_{TI} = 6$:

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	13	$13 T_H$	4
2	34	$21 T_H$	4
3	78	$44 T_H$	6
4	99	$21 T_H$	4
5	142	$43 T_H$	6
6	160	$18 T_H$	4

$$(5.2.16) \quad M_{TI} = 1 :$$

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	160	$160 T_H$	13

$$(5.2.17) \quad M_{TI} = 2 :$$

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	80	$80 T_H$	7
2	160	$80 T_H$	8

$$(5.2.18) \quad M_{TI} = 4 :$$

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	40	$40 T_H$	6
2	80	$40 T_H$	6
3	120	$40 T_H$	5
4	160	$40 T_H$	5

$$(5.2.19) \quad M_{TI} = 8 :$$

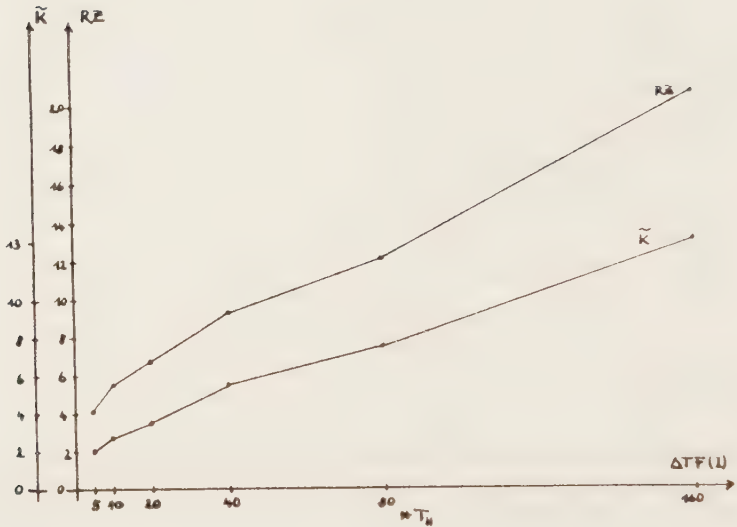
I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	20	$20 T_H$	4
2	40	$20 T_H$	4
3	60	$20 T_H$	3
4	80	$20 T_H$	4
5	100	$20 T_H$	4
6	120	$20 T_H$	3
7	140	$20 T_H$	4
8	160	$20 T_H$	4

$$(5.2.20) \quad M_{TI} = 16 :$$

I	$N_{TI}(I)$	$\Delta TF(I)$	$KR(I)$
0	0	./.	./.
1	10	10 T_H	3
2	20	10 T_H	3
3	30	10 T_H	3
4	40	10 T_H	3
5	50	10 T_H	2
6	60	10 T_H	2
7	70	10 T_H	3
8	80	10 T_H	3
9	90	10 T_H	3
10	100	10 T_H	3
11	110	10 T_H	3
12	120	10 T_H	2
13	130	10 T_H	3
14	140	10 T_H	3
15	150	10 T_H	3
16	160	10 T_H	3

(5.2.21) Rechenzeit für äquidistante Zeitfenster:

M_{TI}	Rechenzeit RZ in CPU-sec	$\tilde{K} := \frac{1}{M_{TI}} \sum_{I=1}^{M_{TI}} KR(I)$	$\Delta TF(1)$
1	20.615	13	160 T_H
2	12.151	7.5	80 T_H
4	9.329	5.5	40 T_H
8	6.714	3.75	20 T_H
16	5.604	2.81	10 T_H
32	4.209	2.09	5 T_H
→ 80	5.765	2.08	2 T_H

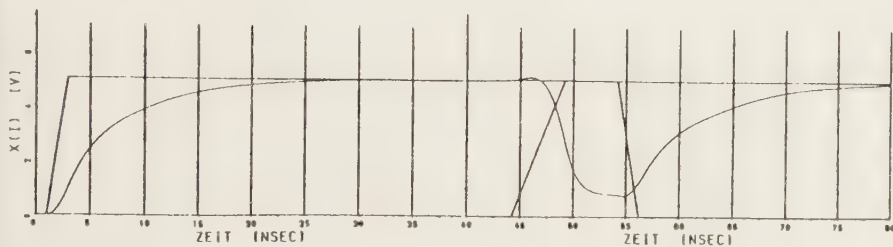


[vgl. hierzu Folgerung (1.2.1.8)]

Die folgenden Abbildungen (5.2.22), (5.2.23), (5.2.24) und (5.2.26), (5.2.27), (5.2.28) die Lösungen an den drain-Kontakten des MOSFETS der 3-stufigen Inverterkette (5.1.2) bzw. des 3-stufigen Ringoszillators (5.1.3), welche unter Verwendung von äquidistanten Zeitfenstern der Länge $\Delta TF(I) = 20 T_H$ durch den AWR-Algorithmus erzeugt werden. Die Relaxationsparameter α und ω mit $\alpha = \omega$ werden dabei nach dem Algorithmus aus Definition (2.2.2.8) bestimmt, siehe Abbildungen (5.2.25) und (5.2.29).

In Abbildung (5.2.25), (5.2.29) sind die in jedem Zeitfenster benötigten Relaxationsschritte angegeben, die für die Erfüllung des Abbruchkriteriums aus Bemerkung (5.1.12)h) mit $\epsilon_R = 0.05$

(5.2.22)



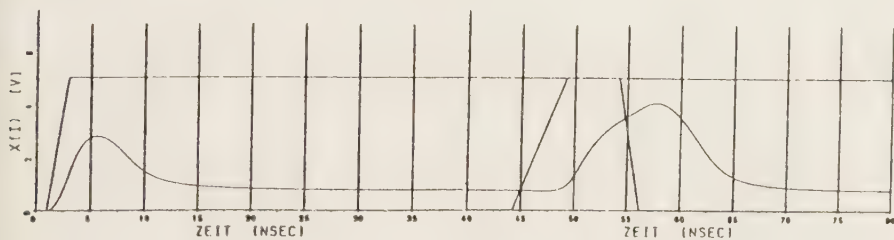
I = 5

MTI = 8
MT = 160

I = 5

MTI = 8
MT = 160

(5.2.23)



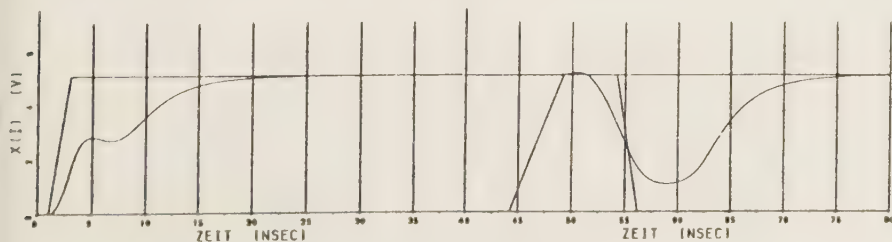
I = 14

MTI = 8
MT = 160

I = 14

MTI = 8
MT = 160

(5.2.24)



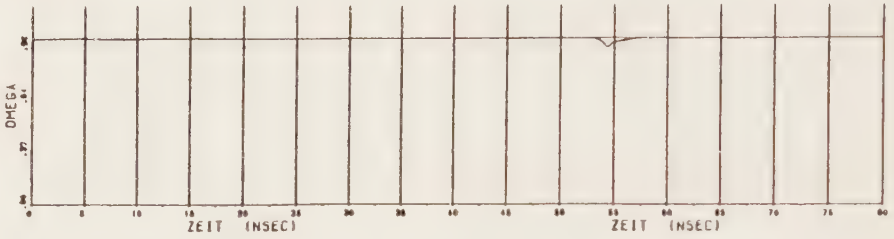
I = 19

MTI = 8
MT = 160

I = 19

MTI = 8
MT = 160

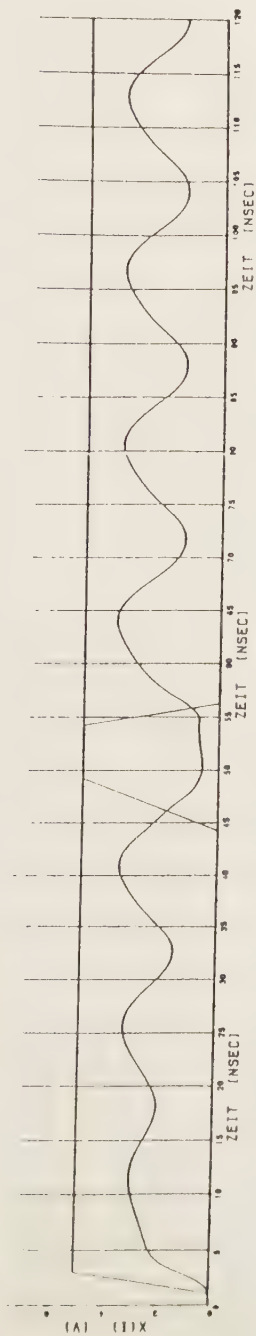
(5.2.25)



WELLENFORM FUER OMEGA

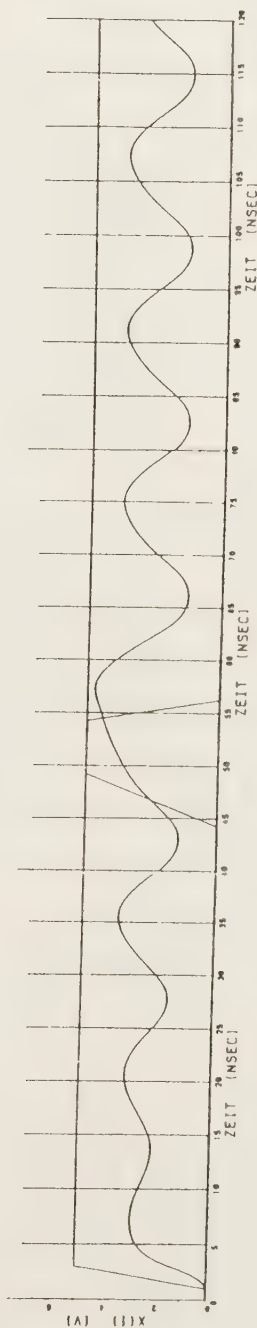
WELLENFORM FUER OMEGA

5.2.26)



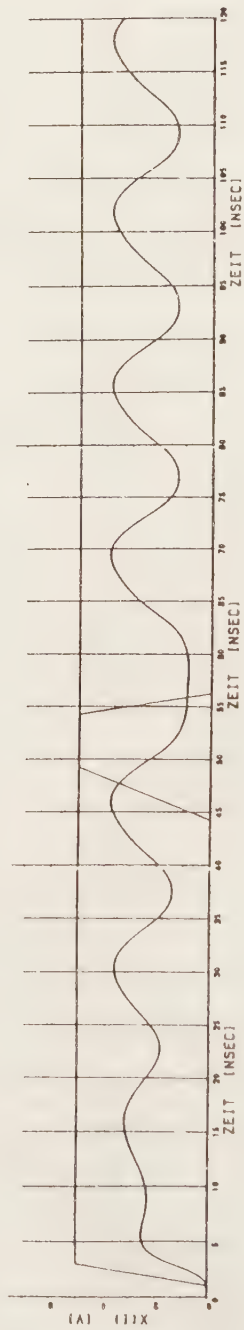
$I = 5$ $MTI = 8$ $MT = 160$ $I = 5$ $MTI = 8$ $MT = 160$

(5.2.27)



$I = 14$ $MTI = 8$ $MT = 160$ $I = 14$ $MTI = 8$ $MT = 160$

(5.2.28)



I = 19

MTI = 8
MT = 160

I = 19

MTI = 8
MT = 160

I = 19

MTI = 8
MT = 160

(5.2.29)



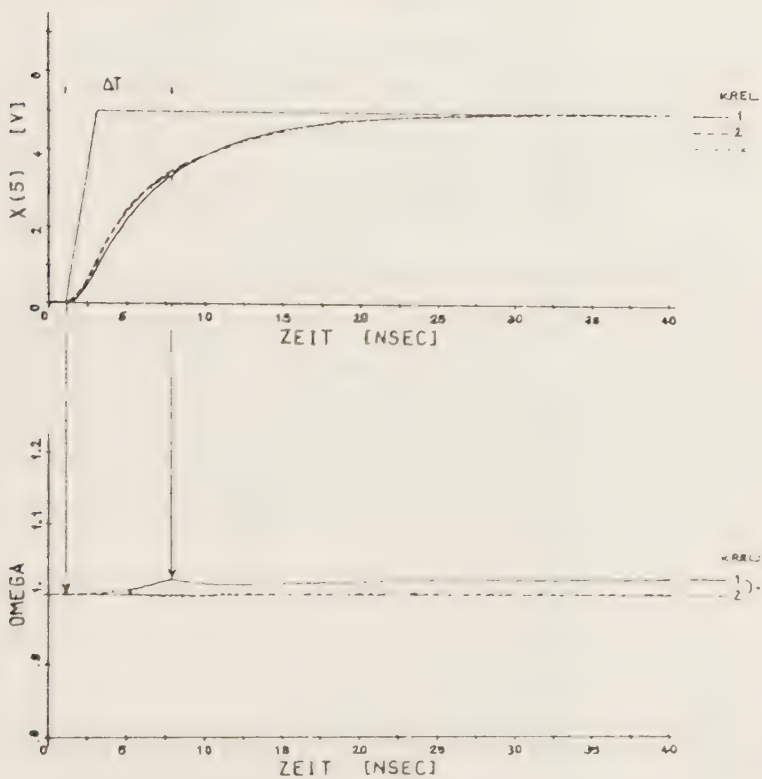
WELLENFORM FÜR OMEGA

WELLENFORM FÜR OMEGA

WELLENFORM FÜR OMEGA

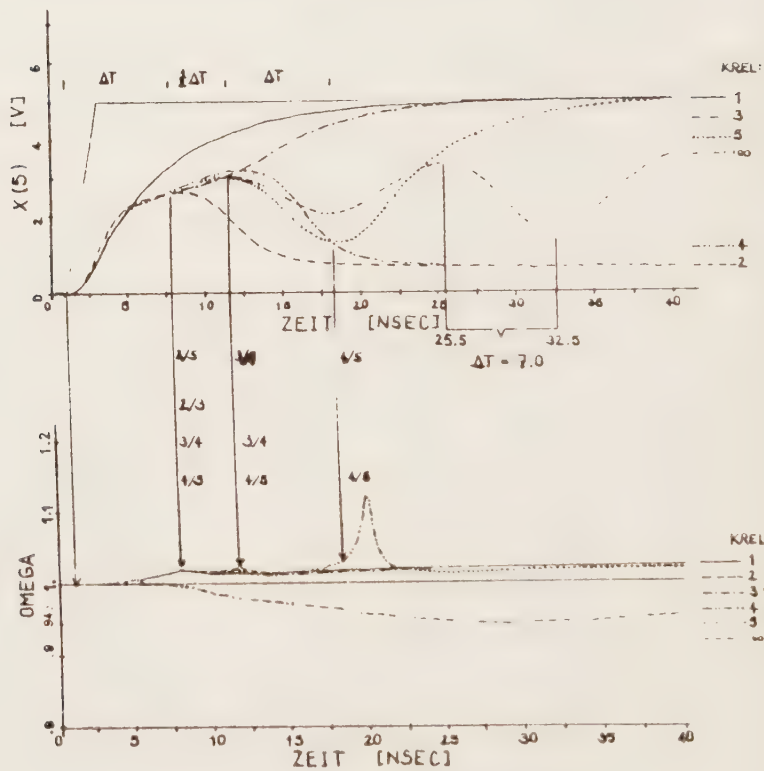
(5.2.30)

INVERTERKETTE [3 - STUFIG]



(5.2.31)

RINGOSZILLATOR [3-STUFIG]



erforderlich sind.

Abbildung (5.2.30) und (5.2.31) zeigen schließlich die nach Definition (2.2.2.8) für die Relaxationsschritte $KREL = 1, 2, 3, 4, 5$ bestimmten Lösungen für die Parameterfunktion ω , wobei keine Zeitfenster verwendet werden. Es fällt dabei auf, daß die Lösungen für ω lokale Maxima an den Zeitpunkten aufweisen, an denen sich durch den AWR-Algorithmus erzeugte Näherungslösungen von (5.2.11) zweier aufeinanderfolgender Relaxationsschritte überschneiden. Die Abstände dieser Schnittpunkte sind durch $\Delta T = 7.0 \text{ nsec}$ bzw. $\frac{1}{2}\Delta T = 3.5 \text{ nsec}$ gegeben; ΔT ist hier gerade die halbe Wellenlänge derjenigen Lösung von (5.2.11), die nach Konvergenz des AWR-Algorithmus erzielt wird. Obwohl in dieser Arbeit hierfür kein Beweis angeführt wird, kann hier aufgrund einer Reihe von Testrechnungen festgestellt werden, daß der Abstand ΔT der Maxima als Maß für eine günstige Wahl der Zeitfensterlänge $\Delta T_F(I)$ herangezogen werden kann [vgl. hierzu auch (5.2.21)].

BEZEICHNUNGEN

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
X	$:= \mathbb{R}^n$
X_j	$:= \mathbb{R}^{n_j}$ mit $\sum_{j=1}^l n_j = n$, $\prod_{j=1}^l X_j = X$
$\underline{\xi} \cdot \underline{\eta}, \langle \underline{\xi} \mid \underline{\eta} \rangle$	euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ $	Norm auf $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ $	von $\ \cdot\ $ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ induzierte Matrixnorm
$\mu \ \cdot\ $	von $\ \cdot\ $ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ induzierte logarithmische Matrixnorm, siehe Def. (1.2.2.2)
$\mu^* \ \cdot\ $	siehe Lemma (1.2.2.4)
$M \ \cdot\ $	lub-Dahlquist-Konstante, siehe Def. (1.2.2.7)
$\overset{\vee}{A} , \hat{A}$	Minorante bzw. Majorante zur Matrix A , siehe Lemma (1.2.2.6)
α, ω	Relaxationsparameter für den AWR-Algorithmus
$\underline{\delta}^{\alpha, \omega, j}$	verallgemeinerte Entkopplungsfunktion, siehe Def. (1.1.2.1)
$\underline{\delta}[v_1, \dots, v_{j-1}, w_1, \dots, w_j]$	komponentenweise verallgemeinerte Entkopplungsfunktion, siehe Def. (3.2.2.4)

G	$:= (N, A, \tilde{A}),$ gerichteter Graph, siehe Def. (3.1.1.2)
$C(D, R)$	$:= \{ \underline{x} : D \rightarrow R : \underline{x} \text{ stetig auf } D \}, D \subset \mathbb{R}^n, R \subset \mathbb{R}^m$
$C^q(D, R)$	$:= \{ \underline{x} : D \rightarrow R : \underline{x} \text{ q-mal stetig differenzierbar} \},$ $q = 1, 2, \dots, \infty$
$C_O^\infty(D, R)$	$:= \{ \underline{x} \in C^\infty(D, R) : \{ \underline{d} \in D : \underline{x}(\underline{d}) \neq 0 \} \text{ kompakt} \}$
$L^q(D, R)$	$:= \{ \underline{x} : D \rightarrow R : \int_D \ \underline{x}(z) \ ^q d\underline{z} < \infty \}$
$D'(\Omega)$	Menge der Distributionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$S^m(\Omega)$	Menge der Symbole der Ordnung m , siehe Def. (4.2.1.1)
$PS^m(\Omega)$	Menge der Pseudodifferentialoperation der Ordnung m , siehe Def. (4.2.1.1)
$WF(n)$	Wellenfront eine Distribution n , siehe Def. (4.2.1.3)
AWP	Anfangswertproblem
GSWR	Gauss-Seidel Waveform Relaxation, siehe Def. (1.1.1.3)
GJWR	Gauss-Jacobi Waveform Relaxation, siehe Def. (1.1.1.3)
AWR	Accelerated Waveform Relaxation, siehe Def. (1.1.1.3)
KVL	Kirchhoff voltage law, siehe (3.1.2.1)
KCL	Kirchhoff current law, siehe (3.1.2.1)
PSDO	Pseudodifferentialoperator
O-B.C.	O-Bicharakteristik, siehe Def. (4.2.1.7)

LITERATUR

- (1) E. BLUM, N. OETTLI:

Mathematische Optimierung,
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

- (2) R.K. BRAYTON, F.G. GUSTAVSON, G.D. HACHTEL:

A new efficient algorithm for solving differential-
algebraic Systems using implicit backward differen-
tiation formulas,
Proc. IEEE, vol. 60, 1972, pp. 98-108.

- (3) R.K. BRAYTON, J.K. MOSER:

A theory of nonlinear networks, I,
Quart. Appl. Math., vol. 22, no. 1, 1964, pp. 1-33.

- (4) R.K. BRAYTON, J.K. MOSER:

A theory of nonlinear networks, II,
Quart. Appl. Math., vol. 22, no. 2, 1964, pp. 81-104.

- (5) I. CATT:

Crosstalk (noise) in digital systems
IEEE Trans. Electronic Computers, vol. EC-16, no. 6,
1967, pp. 743-763.

- (6) B.R. CHAWLA, H.K. GUMMEL, P. KOZAH:

MOTIS - an MOS timing simulator,
IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, 1975,
pp. 901-909.

- (7) E. COHEN:

Program reference for SPICE 2,
University of California, Berkeley, CA, USA,
ERL Memorandum no. ERL - M592, June 1976.

- (8) L. COLLATZ:

Funktionalanalysis und numerische Mathematik,
Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1964.

- (9) B.N. DAS , K.V.S.V.R. PRASAD:

A generalized formulation of electromagnetically
coupled striplines,
IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques,
vol. MMT - 32, no. 11, 1984, pp. 1427-1433.

- (10) G. DAHLQUIST:

Stability and error bounds in the numerical integra-
tion of ordinary differential Equations,
Transactions of the Royal Institute of Technology,
Stockholm, Sweden, no. 130, 1959.

- (11) G. DAHLQUIST:

On matrix majorants and minorants with applications
to differential equations,
Linear Algebra and its Applications, vol. 52/53, 1983,
pp. 199-216.

- (12) C.A. DESOER, H. HANEDA:

The measure of a matrix as a tool to analyze computer
algorithms for circuit analysis,
IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, no. 5, 1972,
pp. 480-486.

- (13) G. DOETSCH:

Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-
Transformation,
Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958.

- (14) B. ENGQUIST, A. MAJDA:

Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves,
Math. Comp., vol. 31, 1977, pp. 629-651.

- (15) S.P. FAN, M.Y. HSUEH, A.R. NEWTON, D.O. PEDERSON:

MOTIS-C, a new circuit simulator for MOS LSI circuits,
Proc. IEEE ISCAS, 1977, pp. 700-703.

- (16) U. FELDMANN, J. HARTER, E.-H. HORNEBER:

Elektrische Simulation -
Anforderungen und praktischer Einsatz, in "CAD für VLSI" (Hrsg. H.G. Schwärtzel), Vorträge des Siemens-Symposiums, 8./9. Nov. 1982, München.

- (17) C.W. GEAR:

Numerical initial value problems in ordinary differential equations,
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

- (18) A. HADJIDIMOS:

Accelerated overrelaxation method,
Math. Comp., vol. 32, no. 141, 1978, pp. 149-157.

- (19) A. HADJIDIMOS:

Optimum iterative methods for the solution of singular linear systems arising from the discretisation of elliptic P.D.E.'s,
J. Comput. Appl. Math. 12/13, 1985, pp. 319-329.

- (20) J.K. HALE:

Ordinary differential equations,
John Wiley & Sons, 1969.

- (21) R.L. HIGDON:

Initial-boundary value problems for linear hyperbolic
Systems

SIAM Reviews, vol. 28, no. 2, 1986, pp. 177-217.

- (22) C.W. HO:

Theory and computer-aided analysis of lossless trans-
missions lines,

IBM J. Res. Developm., vol. 17, 1973, pp. 249-255.

- (23) C.W. HO, A.E. RUEHLI, P.A. BRENNAN:

The modified modal approach to network analysis,
IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, no. 6,
1975, pp. 504-509.

- (24) L. HÖRMANDER:

Fourier integral operators I, II,
Acta Mathematica, vol. 127, 1971, pp. 79-183, and
Vol. 128, 1972, pp. 183-269 (with J.J. Duistermaat).

- (25) R.J. KAYE, A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

Solution of piecewise-linear Ordinary differential
equations Using Waveform Relaxation and Laplace
Transforms,

IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-30, no. 6,
1983, pp. 353-357.

- (26) H.-O. KREISS

Initial-boundary value problems for hyperbolic systems,
Com. Pure Appl. Math., vol. 23, 1970, p. 277-298.

- (27) H.-O. KREISS, J. OLIGER:

Methods for the approximate solution of time dependent problems,
GARP Publication Series, no. 10,
World Metereological Organization, Genf, 1973.

- (28) E. LELARSMEE:

The waveform relaxation method for time domain analysis of large scale integrated circuits,
Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley, USA, 1982.

- (29) E. LELARSMEE, A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

Some new results on waveform relaxation algorithms for the simulation of integrated circuits,
Proc. 1982 IEEE Int. Large Scale Systems Symp.,
Virginia Beach, USA, Oct. 11-13, 1982, pp. 371-375.

- (30) E. LELARSMEE, A.E. RUEHLI, A.E. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits,
IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. CAD-1, no. 3, 1982, pp. 131-144.

- (31) S.M. LOZINSKIJ:

error estimates for numerical integration of ordinary differential equations, Part I,
Jzv. Vyss. Učebu. Zaved. Matematika, vol. 6, no. 6, 1958, pp. 52-90,
and errata 5,12,1959, p. 222 (in russian).

- (32) D.K. LYNN, C.S. MEYER, D.J. HAMILTON:

Analysis and design of integrated circuits,
McGraw-Hill Book Company, San Francisco, Toronto,
London, Sidney, 1967.

- (33) G. de MICHELI, A.R. NEWTON, A. SAGIOVANNI-VINCENTELLI:

Symmetric displacement algorithms for the timing
analysis of large scale circuits,
IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated
Circuits and Systems, vol. CAD-2, no. 3, 1983,
pp. 167-180.

- (34) G. de MICHELI, A. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

Characterization of integration algorithms for the
timing analysis of MOS VLSI circuits,
Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 10, 1982,
pp. 299-309.

- (35) L.W. NAGEL:

SPICE 2, a computer program to simulate semiconductor
circuits,
University of California, Berkeley, CA, USA,
ERL Memorandum no. ERL-M520, May 1975.

- (36) K. NEUMANN:

Optimierung von Funktionalen unter nichtholomonen
Nebenbedingungen, Teil I u. II,
Unternehmensforschung 13, 1969, pp. 37-57 und
pp. 110-122.

- (37) A.R. NEWTON:

The simulation of large scale integrated circuits,
University of California, Berkeley, CA, USA,
ERL Memorandum no. ERL-M78/52, July 1978.

(38) A. R. NEWTON:

Timing, logic and mixed-mode simulation for large MOS
integrated circuits,
in
"Computer Design Aids for VLSI Circuits"
(Ed. P. Autognetti, D.O. Pederson, H. de Man),
NATO ASI Series E: Applied Sciences, no. 48,
1980 (2nd printing 1984), pp. 175-239.

(39) A.R. NEWTON, A. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

Relaxation - based electrical simulation,
IEEE Trans. Electron Devices, vol. ED-30, no. 3,
1983, pp. 1185-1207, and
SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 4, no. 3, 1983,
pp. 485-524.

(40) L. NIRENBERG:

Lectures on linear partial differential equations,
CBMS Regional Conference Series in Math., vol. 17,
American Math. Soc., Providence R.I., 1973.

(41) J.M. ORTEGA, W.C. RHEINBOLDT:

Iterative solution of nonlinear equations in several
variables,
Academic Press, New York, 1970.

(42) W.C. RHEINBOLDT:

A unified convergence theory for a class of iterative
processes,
SIAM J. Numer. Anal., vol. 5., no. 1, 1958, pp. 42-63.

- (43) A.E. RUEHLI:

Survey of computer-aided electrical analysis of
integrated circuit interconnections,
IBM J. Res. Develop., vol. 23, no. 6, 1979,
pp. 626-639.

- (44) J. RUTKOWSKI:

Heuristic network partitioning algorithm using the
concept of loop index,
IEEE Proc., vol. 131, Pt. G, no. 5, 1984, pp. 203-208.

- (45) A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

Circuit simulation,
in
"Computer Design Aids for VLSI, circuits"
(Ed. P. Antognetti, D.O. Pederson, H. de Man)
NATO ASI Series E: Applied Sciences, no. 48, 1980,
pp. 19-112.

- (46) A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI, L.-K. CHEN, L.O. CHUA:

An efficient heuristic cluster algorithm for tearing
large-scale networks,
IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-24, no. 12,
Dec. 1977, pp. 709-717.

- (47) S. SCHECHTER:

Iteration methods for nonlinear problems,
Trans Amer. Math. Soc., vol. 104, 1962, pp. 179-189.

- (48) H. SHICHMAN, D.A. HODGES:

Modelling and Simulation of insulated-gate field-effect
transistor switching circuits,
IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC-3, no. 3, 1968,
pp. 285-289.

(49) G. SÖDERLIND:

On nonlinear difference and differential equations,
BIT 24, 1984, pp. 667-680.

(50) G. SÖDERLIND:

Bounds on nonlinear operators in finite-dimensional
Banach spaces,
Numer. Math. 50, 1986, pp. 27-44.

(51) J. STARZYK, E. SLIWA:

Hierarchic decomposition method for the topological
analysis of electronic networks,
Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 8, 1980,
pp. 407-417.

(52) T. STRÖM:

On logarithmic Norms,
SIAM J. Numer. Anal., vol. 12, no. 5, 1975,
pp. 741-753.

(53) M. TAYLOR:

Reflection of singularities of solutions to systems of
differential equations,
Com. Pure Appl. Math., vol. 28, 1975, pp. 457-478.

(54) A. VLADIMIRESCU, K. ZHANG, A.R. NEWTON, D.O. PEDERSON,
A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

SPICE Version 2G.5 unuser's guide,
Department of Electrical Engineering and Computer
Sciences,
University of California, Berkeley, CA 94 720, USA,
1981.

(55) W. WALTER:

Gewöhnliche Differentialgleichungen,
eine Einführung,
2., korrigierte Auflage,
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

(56) W.T. WEEKS, A.J. JIMENEZ, G.W. MAHONEY, D. MEHTA,
H. QASSEMZADEH, T.R. SCOTT:

Algorithms for ASTAP - a network analysis program,
IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-20, 1973,
pp. 628-653.

(57) "Advanced statistical analysis program (ASTAP)",
IBM Corp. Data Proc. Div.,
White Plains, N.Y., USA, Pub. no. SH20-1118-0.

(58) J. WHITE, A.L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI:

RELAX 2.1: A waveform relaxation based circuit
simulation program,
Proc. Custom Integrated Circuits Conference (CICC),
Rochester, N.Y., USA, 21-23 May 1984, pp. 232-236.

(59) D.M. YOUNG:

Iterative solution of large linear systems,
Academic Press, New York and London, 1971.

(60) K. YOSIDA:

Functional Analysis,
Fourth Edition,
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

(61) R. ZURMÜHL:

Matrizen,

4. neubearbeitete Auflage,

Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1964.

LEBENS LAUF

Konstantin Jacoby	geboren am 23.9.1957 in München
Schulbildung	1964 bis 1968 Volksschule, 1968 bis 1977 Max-Planck-Gymnasium in München, 1977 Abitur
Wehrdienst	Juli 1977 bis September 1978
Studium	1978 bis 1984 Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Ludwig- Maximilians-Universität München, 1978 bis 1980 4 Semester Physik, März 1984 Diplomprüfung im Fach Mathematik
Tätigkeit	1982 bis 1987 wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der LMU München, 1984 bis 1987 Untersuchung numerischer Methoden der Schaltungssimulation im Rahmen eines Doktorandenstipendiums der Siemens AG.

